Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Осетинский государственный университет имени Коста Левановича Хетагурова»

(ФГБОУ ВО «СОГУ»)

Утверждаю
Проректор по научной деятельности
_______ Б.В. Туаева
«___» ________ 2023 г.

Программа вступительного испытания по научной специальности основной образовательной программы высшего образования - программы подготовки научных и научно- педагогических кадров в аспирантуре

1.1. Математика и механика

Научные специальности:
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика
1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Владикавказ 2023

1. Область применения и нормативные ссылки

Программа вступительного испытания сформирована на основе федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования по программам специалитета или магистратуры.

2. Структура вступительного испытания

Форма проведения: вступительные испытания по научным специальностям 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика принимаются в устной форме очно или дистанционно.

3. Содержание вступительного экзамена

3.1 Содержание вступительного экзамена по научной специальности 1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

1. Вопросы по вещественному анализу

1. Действительные числа. Расстояние в R и R^n. Открытые и замкнутые множества. Замыкание множества. Предел последовательности. Инфимум и супремум подмножеств числовой прямой. Структура открытых множеств на прямой. Сумма ряда

2. Топологические пространства, база топологии, непрерывность функции, предел последовательности, сепарабельность. Метрические пространства, полнота, пополнение. Топология, порожденная метрикой.

3. Компактность, основные свойства компактных пространств. Вполне ограниченные множества. Критерий Хаусдорфа. Теоремы Вейерштрасса и Стоуна - Вейерштрасса о приближении непрерывных функций. Критерий компактности в C[a,b].

4. Мера Лебега на отрезке и на общем измеримом пространстве. Множество типа Кантора положительной меры Лебега.

5. Интеграл Лебега и его основные свойства. Связь с интегралом Римана. Неравенства Гёльдера, Минковского, Йенсена.

6. Теоремы Егорова, Лузина, Беппо Леви, Фату. Сходимость почти всюду, по мере, в среднем, поточечная, связь между ними.

7. Теорема Фубини. Теорема Радона - Никодима.

8. Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции ограниченной вариации. Абсолютно непрерывные функции. Восстановление функции по ее производной. Формула Ньютона - Лейбница.

9. Производная отображений в R^n. Связь с частными производными. Теоремы об обратной и неявной функции.

10. Гамма и бета функции Эйлера. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его простейшие свойства.

Литература:

1. В. А. Зорич. Математический анализ, т. 1, 2. Любое издание.

2. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа. Любое издание.

3. В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. РХД, 2020.

2. Вопросы по комплексному анализу

1. Последовательности и ряды комплексных чисел. Функции комплексного переменного, дифференцируемость, геометрический смысл производной. Условия Коши-Римана. Элементарные функции комплексного переменного.

2. Интегрирование функций комплексного переменного по кривым. Формула для вычисления с помощью параметризации. Интегральная теорема Коши. Теорема о

первообразной. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем для голоморфной функции. Принцип максимума модуля. Теорема Мореры.

3. Степенные ряды комплексного переменного. Радиус сходимости. Аналитичность суммы. Представление голоморфных функций степенными рядами. Единственность разложения. Разложения элементарных функций.

4. Целые функции. Теорема Лиувилля.

5. Аналитическое продолжение голоморфных функций. Аналитическое продолжение вдоль кривой. Многозначные аналитические функции Ln(z), z^a. Точки ветвления.

6. Ряд Лорана. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана. Изолированные особые точки. Теорема о главной части ряда Лорана в окрестности устранимой точки. Полюс. Порядок полюса. Вид ряда Лорана в окрестности полюса. Существенно особые точки. Вид ряда Лорана в окрестности существенно особой точки. Теорема Пикара. Классификация особых точек.

7. Вычеты. Основная теорема о вычетах. Вычисление интегралов с помощью теоремы о вычетах. Лемма Жордана. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема высшей алгебры.

8. Конформные отображения и их основные свойства. Критерий локальной однолистности. Принцип соответствия границ. Теорема Римана.

Литература:

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Любое издание.

2. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. Любое издание.

3. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. Любое издание.

3. Вопросы по функциональному анализу

1. Нормированные, банаховы, евклидовы, гильбертовы пространства. Основные часто используемые пространства функций и последовательностей.

2.Ортогональные проекции. Ортонормированные системы и базисы в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Изоморфизм бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств. Примеры базисов в $L^2[a,b]$ и $L^2(R)$. Сходимость рядов Фурье.

3. Линейные функционалы. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Теорема Хана - Банаха. Отделимость выпуклых множеств.

4. Сопряженное пространство. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Сопряженные к основным часто используемым пространствам.

5. Слабая и *-слабая топологии. Теорема Банаха - Алаоглу.

6. Линейные операторы между нормированными пространствами. Норма, непрерывность и ограниченность оператора. Сопряженный к ограниченному оператору и его норма.

7. Спектр и резольвента ограниченного оператора. Компактные операторы и их свойства. Спектр компактного оператора. Теорема Фредгольма.

8.Самосопряженные ограниченные операторы и их спектры. Теорема Гильберта -Шмидта. Представление самосопряженного оператора в виде умножения на функцию.

9. Локально выпуклые пространства. Пространства пробных функций *D* и S. Обобщенные функции классов *D'* и *S'*. Дифференцирование обобщенных функций.

10. Преобразование Фурье в пространствах *S*, *S'*.

Литература

1. В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. РХД, 2020. - 756 с.

2. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа. Любое издание.

3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 358 с.

4. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 443 с.

5. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2014. - 560 с.

3.2. Содержание вступительного экзамена по научной специальности 1.1.2 «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

1. Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки) и теории вероятностей (независимость, условные вероятности).

2. Теория групп: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение конечно порожденных абелевых групп, теоремы Силова. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные, группы симметрии, матричные группы (полная линейная, специальная линейная), группы вычетов.

3. Теория колец: кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема об остатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.

4. Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность.

5. Теория полей: поля, характеристика, структура конечных полей, конечные и алгебраические

расширения, основная теорема теории Галуа.

6. Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.

7. Общая топология: открытые и замкнутые подмножества в R^{A}n. Компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Топологические пространства. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра. Компактность. Связность. Нормальность.

8. Элементы гомотопической топологии: гомотопные отображения, накрытия, фундаментальная

группа, локально тривиальные расслоения.

9. Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из $R^{л}$mb R^{A}n, теорема

о производной сложной функции, ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.

10. Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.

11. Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения.

12. Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.

13. Дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности, решение

уравнений методом разделения переменных, линейные уравнения первого и второго порядков, однородные уравнения, теорема Фробениуса.

Литература

В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984 (и другие издания).

В.И. Арнольд, Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп.-М.: Наука, 1989 (и другие издания).

В.А. Васильев, Введение в топологию, М: Фазис 1997 Э.Б. Винберг. Курс алгебры. М: Факториал 1999

О.Я. Виро и др. Элементарная топология. М.:МЦНМО, 2010 И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971

А. Л. Городенцев, Вышкинская алгебра, модуль 1. записки лекций http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/algebra-l/ml_total.pdf

А.Н. Колмогоров. С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976

В. В.В. Прасолов. В.М. Тихомиров, Геометрия. М: МЦНМО 1997 Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ. Лань 2004

3.4. Содержание вступительного экзамена по научной специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

1. Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки) и теории вероятностей (независимость, условные вероятности).

2. Теория групп: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение
конечно порожденных абелевых групп, теоремы Силова. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные, группы симметрии, матричные группы (полная линейная, специальная линейная), группы вычетов.

3. Теория колец: кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема обостатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.

4. Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность.

5. Теория полей: поля, характеристика, структура конечных полей, конечные и алгебраические расширения, основная теорема теории Галуа.

6. Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции.
Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.

7. Общая топология: открытые и замкнутые подмножества в R^{A}n. Компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Топологические пространства. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра. Компактность. Связность. Нормальность.

8. Элементы гомотопической топологии: гомотопные отображения, накрытия, фундаментальная группа, локально тривиальные расслоения.

9. Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из $R^{л}$mb R^{A}n, теорема о производной сложной функции, ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.

10. Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега, предельный переход под знаком

интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.
11. Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения.
12. Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.
13. Дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности, решение уравнений методом разделения переменных, линейные уравнения первого и второго порядков, однородные уравнения, теорема Фробениуса.

Литература

В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984 (и другие издания).
В.И. Арнольд, Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп.-М.: Наука, 1989 (и другие издания).
В.А. Васильев, Введение в топологию, М: Фазис 1997 Э.Б. Винберг. Курс алгебры. М: Факториал 1999 О.Я. Виро и др. Элементарная топология. М.:МЦНМО, 2010 И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971
Л. Городенцев, Вышкинская алгебра, модуль 1. записки лекций http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/algebra-l/ml_total.pdf
А. Зорич, Математический анализ. М: МЦНМО 2007
Л.Н. Колмогоров. С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976
В.В. Прасолов. В.М. Тихомиров, Геометрия. М: МЦНМО 1997

Экзаменационные билеты составляются по вышеприведенным программам и состоят из 2-х вопросов по программам научных специальностей.