ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ КОСТА ЛЕВАНОВИЧА ХЕТАГУРОВА»

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «Чеченский государственный университет»

# Организация работы над составной задачей в начальной школе

**(учебно-методическое пособие)**

**Зембатова Л.Т.**

**д.п.н., профессор**

**Владикавказ**

**2020**

**Рецензенты:**

**Магомеддибирова З.А.,** д.п.н., профессор кафедры методик начального образования ФГБОУ ВО «Чеченский государственный педагогический университет».

**Сорокопуд Ю. ,** д.п.н., профессор кафедры гуманитарных наук, АНО ВО «Московский международный университет».

Учебно-методическое пособие адресовано студентам педагогических вузов по специальности 44.03.01«Педагогическое образование», Профиль «Начальное образование» и учителям начальных классов. Материал, представленный в нем, поможет им расширить теоретические знания в области школьных задач и повысить свой методический уровень в организации работы по решению разных групп задач.

**Владикавказ 2020**

## Содержание

**Стр.**

## Введение

Особо остро сегодня стоит вопрос о качестве подготовки педагогических кадров. Модернизация профессионального образования в качестве основной определяет задачу подготовки квалифицированного специалиста соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, свободно владеющего своей профессией, готового к постоянному профессиональному росту.

Сказанное имеет непосредственное отношение и к подготовке учителей начальных классов. Одной из дисциплин предметной подготовки специалистов по специальности 44.03.01«Педагогическое образование» Профиль «Начальное образование» является методика преподавания математики в начальных классах. Текстовые задачи, в содержании начального курса математики, занимают центральное место. Научить учащихся решать текстовые задачи разной степени сложности, проблемности и трудности является одной из основных целей начальной школы.

Опыт последних лет показывает, что учителя начальных классов достаточно хорошо умеют излагать готовые знания, добиваясь при этом не плохих результатов в усвоении школьниками системы специальных знаний.

Однако другой компонент процесса обучения – учение самих школьников – проявляется на практике еще недостаточно. Сама учебная деятельность по усвоению основ наук носит односторонний характер: в ней преобладает усвоение и запоминание готовых знаний и совершенно недостаточное место занимает творческая работа учащихся – их мало учат самим добывать знания, анализировать их, применять в различных ситуациях.

В современных условиях успех сопутствует работе тех учителей, которые применяют приемы и методы обучения, максимально активизирующие познавательную деятельность учащихся, и умеют активно управлять этой деятельностью. Поэтому существенное повышение качества обучения математике в современных условиях может быть достигнуто за счет мероприятий двустороннего характера с одной стороны – повышения роли и качества работы учителя (которому необходимо помочь овладеть новым содержанием и новой методикой преподавания). А с другой – повышения роли и объема самостоятельной познавательной деятельности самих школьников в процессе обучения (которым необходимо привить интерес к этой деятельности и помочь овладеть ее основными приемами).

Усовершенствование процесса обучения математике в единстве этих двух направлений составляет одну из актуальных педагогических проблем – проблему активизации процесса обучения.

В данном учебно-методическом пособии рассматривается проблема активизации познавательной деятельности младших школьников в процессе обучения их решению текстовых задач.

Учебно-методическое пособие адресовано студентам педагогических вузов и учителям начальных классов. Оно поможет им расширить теоретические знания в области школьных задач и повысить свой методический уровень в организации деятельности по решению логических задач и задач повышенной сложности. Студенты и учителя начальных классов смогут ознакомиться с такими теоретическими сведениями о задачах, которые не содержатся в учебном пособии «Методика преподавания математики в начальных классах» (авт. М.А. Бантова, Г.В. Бельтюкова), рекомендованного в качестве основного для педагогических специальностей. Практическая часть учебно-методического пособия содержит рекомендации по решению различных групп задач, в том числе и логических задач, на основе составления таблиц, и задач повышенной сложности разными способами.

Пособие содержит задачи разной степени сложности, которые могут быть использованы учителями, как в урочное время, так и во внеурочное.

## 1. Понятие «задача» и ее виды

Известно, что человеку в его практической деятельности приходится решать не только неоднократно повторяющиеся задачи, но и новые, никогда не встречавшиеся. Поэтому школа должна научить детей находить пути к решению проблем, а это значит - формировать у учащихся способность к самостоятельному, творческому мышлению. Возможность для приобщения школьников к творческой деятельности представляют текстовые задачи. Роль текстовых задач в этом процессе – общеизвестна. Задача – это средство закрепления теории, создание и развитие практических и логических навыков, способ получения новой информации и, наконец, сильный метод педагогического воздействия на характер обучаемого школьника.

В силу указанных обстоятельств и, особенно, последнего, велика роль задач в обучении. Здесь они выступают в качестве цели и средства. Учащиеся должны уметь решать задачи из разных областей знания — это цель любой системы образования. С другой стороны, только овладевая методами и приемами решения задач, и, прежде всего, обобщенными, обучаемые развиваются не только в интеллектуальном плане, в плане умения думать, но и в общем познавательном, ибо расширяются возможности познания, интерес и стремление к приобщению знаний, значительно обогащается эмоциональная сфера в результате удовлетворения замыслов успешно осуществленных поисков. В этом случае задачи выступают весьма важным средством обучения.

Велика роль текстовых задач и в начальном обучении математике. Решая задачи, учащиеся приобретают новые математические знания, готовятся к практической деятельности. Задачи способствуют развитию их творческого мышления. Большое значение имеет решение задач и в воспитании личности учащегося. Поэтому важно, чтобы учитель имел глубокие представления о текстовой задаче, о ее структуре, умел решать сам такие задачи различными способами и обучал этому детей.

До настоящего времени нет общего определения понятия «задача». Задача может рассматриваться в разных науках: психологии, логике, педагогике, кибернетике и др.

Г.А. Балл, анализируя различные трактовки, дает такую последовательность определений задачи: «Задача есть ситуация, требующая от субъекта некоторого действия».

«Мыслительная задача - ситуация, требующая от субъекта некоторого действия, направленного на нахождение неизвестного на основе использования его связей с известным».

«Проблемная задача или проблема - ситуация, требующая от субъекта некоторого действия, направленного на нахождение неизвестного на основе использования его связей с известным в условиях, когда субъект не обладает способом (алгоритмом) этого действия». Ф.С. Лимантов считает понятие задачи как требование выполнить некоторые действия.

Наиболее простое определение задачи было дано известным педагогом-математиком С.О. Шатуновским: «Задача есть изложение требования «найти» по «данным» вещам другие «искомые» вещи, находящиеся друг к другу и к данным вещам в указанных соотношениях».

Прежде всего, каждая задача включает числа данные и искомые. Числа в задаче характеризуют численности множеств или значения величин, выражают отношения или являются отвлеченными данными числами.

Рассмотрим несколько видов задач:

1) Школьники посадили 10 саженцев яблони и 5 саженцев персиков. Сколько всего саженцев посадили школьники?

2) Велосипедист проехал 2ч со скоростью 12км/ч. Сколько км он проехал?

3) Мама купила 2 куска ткани. За первый кусок она заплатила 60 руб., а за второй в два раза больше. Сколько рублей стоил второй

кусок?

4) Какое число надо вычесть из 13, чтобы получить 8?

В задаче №1 число 10 характеризует численность множества яблонь. В задаче №2 число 12 является значением величины – длины. В задаче №3 число 2 выражает отношение двух чисел: стоимости ткани во втором куске и в первом. В задаче №4 даны отвлеченные числа – 13 и 8, которые являются соответственно уменьшаемым и разностью. Таким образом, каждая задача имеет условие. В условии задачи указываются связь между данными числами, а также между данными и искомым, эти связи и определяют выбор соответствующих арифметических действий. Вопрос указывает, какое число является искомым. Искомое число, это число, которое необходимо найти, а чтобы его найти задачу следует решить. А решить задачу — это значит установить связи между данными и искомыми числами и на основании этих связей выбрать, а затем выполнить арифметическое действие.

В близкой связи с такими задачами находятся упражнения, которые называют задачи-вопросы. В задачах-вопросах, как и в собственно задачах, имеется условие (которое может включать числа, а может и не включать) и вопрос. Однако в отличие от задачи для решения задачи-вопроса достаточно установить соответствующие связи между данными и искомым, а арифметических действий выполнять не надо. Например: «Из двух поселков выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста, которые встретились через 40 минут. Сколько времени до встречи был в пути каждый?»

Отвечаем на вопрос задачи следующим образом:

«Если велосипедисты выехали одновременно навстречу друг другу и встретились, то время движения у них будет одинаковое. Значит, каждый велосипедист до встречи находился в пути 40 минут».

Начальный курс математики содержит разные типы задач.

Классификация задач может быть произведена по различным признакам (рис.1).

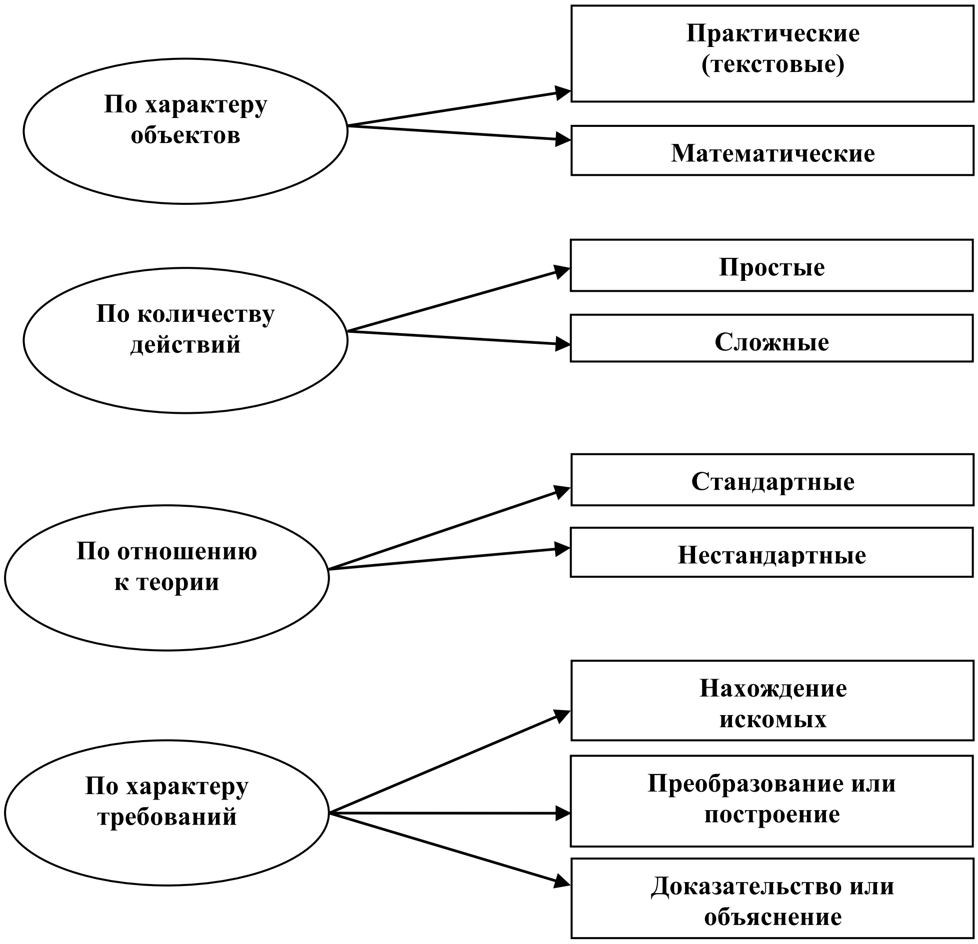



**Рис.1.** Классификация задач.

*По характеру объектов* задачи делятся на *практические* (текстовые, сюжетные) и *математические*.

Задачи, в которых объектами являются реальные предметы, называются *практическими* (житейскими, текстовыми, сюжетными).

Задачи, в которых все объекты математические (числа, геометрические фигуры, функции и т.д.) называются *математическими*.

Приведем пример практической задачи:

Телефонная проволока, длиной 15м протянута от столба, где она прикреплена на высоте 8м от поверхности земли, к дому, где ее прикрепили на высоте 20м. Найдите расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает.

Объектами этой задачи являются вполне реальные предметы: проволока, столб, дом. Поэтому это практическая задача. Чтобы ее решить с помощью математики, надо построить соответствующую ей математическую задачу, которая получается путем отвлечения от конкретных особенностей реальных предметов и заменой их математическими объектами. В данном случае проволоку, столб и дом (точнее, стену дома) можно рассматривать как отрезки. Считая, что поверхность земли есть прямая, а отрезки, изображающие столб и дом, перпендикулярны к этой прямой, получаем такую математическую задачу: « Отрезки длиной 8м и 20м перпендикулярны к прямой, соединяющей их концы, и расположены по одну сторону от этой прямой. Отрезок, соединяющий другие концы этих отрезков, имеет длину 15м. Найдите расстояние между первыми двумя отрезками».

Заметим, что в начальном курсе математики рассматриваются лишь практические задачи.

*По количеству действий* задачи делятся на *простые* и *составные* (сложные).

Задача, для решения которой надо выполнить одно арифметическое действие, называется *простой*.

Задача, для решения которой надо выполнить несколько действий, связанных между собой (не зависимо от того, будут ли это разные или одинаковые действия), называется *составной (сложной)*.

Простые задачи можно разделить на виды либо в зависимости от действий, с помощью которых они решаются (простые задачи, решаемые сложением, вычитанием, умножением, делением), либо в зависимости от тех понятий, которые формируются при их решении.

Составными задачами принято считать задачи, для решения которых нужно произвести два или больше действий. Например: «Пенал стоит 30 коп., а книга на 20 коп. дороже. Сколько стоят книга и пенал вместе?» Для решения этой задачи уже необходимо выполнить два действия. Она состоит из двух простых задач. Первая простая задача: «Пенал стоит 30 коп., а книга на 20 коп. дороже. Сколько стоит книга?» Решение первой простой задачи: 30 коп. + 20 коп. = 50 коп. Вторая простая задача: «Пенал стоит 30 коп., а книга 50 коп. Сколько стоят книга и пенал вместе?» Решение этой задачи: 30 коп. -+- 50 коп. = 80 коп. Только решив первую простую задачу, мы получаем данные для решения второй простой задачи. Решив вторую простую задачу, мы ответили и на вопрос всей составной задачи.

Иногда задачи решаются тремя, четырьмя, пятью и более действиями, т. е. такая составная задача распадается на три, четыре, пять и т. д. простых задач. Последовательно решая эти простые задачи, мы на каком-то этапе рассуждений отвечаем на вопрос составной задачи.

Таким образом, всякая составная задача может быть решена лишь при условии, что учащийся умеет сознательно решать простые задачи. Следовательно, прежде чем приступать к решению составных задач, следует предварительно научить учащихся решению простых задач.

Для составных задач нет такого единого основания классификации, которая позволила бы разбить их на определенные группы. Однако, по методическим соображениям, целесообразно выделить из всего многообразия задач некоторые группы, сходные либо математической структурой, либо способом решения, либо конкретным содержанием.

***По отношению к теории* задачи делятся, на *стандартные* и *нестандартные*.**

Задачи, для решения которых имеются готовые правила (алгоритм) или эти правила непосредственно следуют из каких-либо определений, определяющих способ решения этих задач в виде последовательности шагов, называются стандартными.

Нестандартные задачи это такие задачи, для решения которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, то есть алгоритм решения этих задач не известен.

***По характеру требований*** задачи делятся, на:

– нахождение искомого;

– преобразование или построение;

– доказательство или объяснение.

***Задачи на нахождение искомого*** – в задачах этого класса требование состоит в том, чтобы найти, разыскать, распознать какое-то искомое. При этом, искомым могут быть величина, отношение, какой-либо объект, предмет, его положение или форма и т.д. Примерами задач этого класса являются задачи на вычисление различных выражений, геометрические вычислительные задачи (где нужно найти длину отрезка, величину угла, площадь фигуры и т.д.), решение различных уравнений и т.д.

***Задачи на доказательство или объяснение*** – в задачах этого класса требование состоит в том, чтобы убедиться в справедливости некоторого утверждения, или проверить верность или ложность этого утверждения, или, объяснить, почему имеет место тот или иной факт.

***Задачи на преобразование или построение*** – к этому классу относятся задачи, в которых требуется преобразовать какое-либо выражение, упростить его, представить в другом виде, построить что-либо (например, геометрическую фигуру или выражение), удовлетворяющее указанным условиям.

При соотнесении разновидностей задач, используемых в процессе обучения, необходимо учитывать еще ряд показателей: **сложность, проблемность, трудность.**

Под ***сложностью*** задачи обычно понимают то количество действий (операций), которое нужно выполнить, чтобы получить решение. Уровень сложности устанавливается экспертами в зависимости от целей осуществляемого анализа. Сложность выступает в качестве объективной характеристики задачи.

Под степенью ***проблемности задачи*** понимается степень затруднения обучаемого в осуществлении поиска решения. То есть, о проблемности задачи для данного контингента можно говорить только на основе результатов ее решения в определенных условиях, в частности временных. Показателем проблемности задачи для обучаемых является статистический показатель правильности ее решения в отведенное время:

$$\boxed{q = \frac{n_0}{n}}$$

Где $n_o$ — общее количество решавших,

n — количество правильно решивших задачу.

В качестве границ этого показателя принимается:

1) $0 \geq q \geq q_1$;

2) $q_1 \leq q \leq q_2$;

3) $q_2 \geq q \leq q_3$;

где $q_1 =$ 15-20%,

$q_2 =$ 80-85%,

$q_3 =$ 100%;

1 - соответствует высокой проблемности;

2 – средней;

3 – малой.

***Трудность*** — интегральный показатель задачи, учитывает и сложность, и проблемность задачи. Трудность задачи, в свою очередь, может быть определена с помощью матрицы:

| | $\mathbf{q_1}$ | $\mathbf{q_2}$ | $\mathbf{q_3}$ |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | 1 | 2 | 3 |
| $p_2$ | 2 | 3 | 4 |
| $P_3$ | 3 | 4 | 5 |

Где $P_1$, $P_2$, $P_3$ — установленные экспертами степени сложности задачи:

$P_1$ — самая высокая степень;

$P_2$ – средняя степень сложности;

$P_3$ — самая низкая степень сложности;

$q_1$ $q_2$, $q_3$, - степень проблемности;

1, 2, 3, 4, 5 — степени трудности задачи для данного контингента обучаемых: 1-очень трудная, 5 — нетрудная задача.

В пособии представлены задачи разной степени проблемности. Например,

№ — малая проблемность (задача несложная),

№* — средняя проблемность (задача сложная),

№** — высокая проблемность (задача повышенной сложности).

Любая текстовая задача представляет собой описание какого-либо явления (ситуации, процесса). В текстовой задаче описывается не все явление в целом, а лишь некоторые его стороны, главным образом, его количественные характеристики.

В обучении математике младших школьников преобладают именно такие задачи. Регулярное включение в работу с классом задач способствует развитию интереса и интеллектуальных способностей детей, активизирует их познавательную деятельность. Наибольший эффект задачи могут дать при условии, если учитель умело организует поисковую деятельность на уроке, то есть не подсказывает ученику ход решения задачи, а правильно направляет его мысль, приобщает к творческой активности.

Решение любой достаточно трудной задачи требует от учащихся напряженного труда, воли и упорства, которые наиболее сильно проявляются тогда, когда дети заинтересованы задачей. Интересную задачу легче решать, так как она мобилизует умственную энергию. Поэтому учитель должен подбирать такие задачи, которые учащиеся хотели бы решать.

Существуют различные методические подходы к обучению детей решению текстовых задач. Но какую бы методику обучения не выбрал учитель, ему надо знать, как устроены такие задачи, и уметь их решать различными методами и способами.

Рассмотрим задачу из начального курса математики и проанализируем ее структуру:

«Портфель, пенал и книга стоят 2400 рублей. Книга стоит на 250руб. дороже, чем пенал, и на 800руб.меньше, чем портфель. Сколько стоит каждый предмет?»

В задаче речь идет о стоимости портфеля, пенала и книги.. Относительно этих объектов имеются определенные *утверждения* и *требования*.

Утверждения:

1) Альбом, пенал и книга стоят 2400 рублей.
2) Книга стоит на 250руб. дороже, чем пенал,
3) Книга стоит на 800руб. дороже, чем альбом.

Требования

1) Сколько стоит альбом?
2) Сколько стоит книга?
3) Сколько стоит пенал?

Утверждения задачи называют *условиями* (или условием). В задаче обычно не одно условие, а несколько элементарных условий. Они представляют собой количественные или качественные характеристики объектов задачи и отношений между ними. Требований в задаче может быть несколько. Они могут быть сформулированы как в вопросительной, так и утвердительной форме. Условия и требования взаимосвязаны.

Систему взаимосвязанных условий и требований называют высказывательной моделью задачи.

Чтобы понять, какова структура задачи, надо выявить ее условия и требования, отбросив все лишнее, второстепенное, не влияющее на ее структуру. Иными словами, надо построить высказывательную модель задачи.

Чтобы получить эту модель, надо текст задачи развернуть (сделать это можно письменно или устно), так как текст задачи, как правило, дается в сокращенном, свернутом виде. Для этого можно перефразировать задачу, построить ее графическую модель, ввести какие-либо обозначения и т.д.

Кроме того, вычленение условий задачи можно производить с разной глубиной. Глубина анализа условий и требований задачи зависит главным образом от того, знакомы ли мы с видом задач, к которому принадлежит заданная, и знаем ли мы способ решения таких задач.

## 2. Методы решения текстовых задач

Основными методами решения текстовых задач являются ***арифметический и алгебраический.***

***Решить задачу*** - это значит через логически верную последовательность действий и операций с имеющимися в задаче явно или косвенно числами, величинами, отношениями выполнить требование задачи (ответить на ее вопрос).

Решить задачу ***арифметическим методом*** - это значит найти ответ на поставленный вопрос посредством выполнения арифметических действий над числами.

Одну и ту же задачу можно решить различными арифметическими способами. Они отличаются друг от друга логикой рассуждений, выполняемых в процессе решения задачи.

Арифметические способы решения одной и той же задачи отличаются отношениями между данными и неизвестными, данными и искомым, положенными в основу выбора арифметических действий, или последовательностью использования этих отношений при выборе действий.

Покажем различные арифметические способы решения конкретной задачи.

***Задача.*** За 8 ч рабочий изготавливает 96 одинаковых деталей. Сколько деталей изготовит он за 5 ч работы?

| *I способ* | *II способ* | *III способ* |
|---|---|---|
| 1) 96:8=12 (дет.) | 1) 8:5=1,6 (раза) | 8 ч =480 мин |
| 2) 12·5 = 60 (дет.) | 2) 96:1,6 = 60 (дет.) | 1) 480:96 = 5 (мин) |
| | | 2) 5 ч = 300 мин |
| | | 3) 300:5 = 60 (дет.) |

Решить задачу ***алгебраическим*** **методом** - это значит найти ответ на поставленный вопрос, составив и решив уравнение или систему уравнений.

При алгебраическом методе ответ на вопрос задачи находится в результате составления и решения уравнения.

В зависимости от выбора неизвестного (неизвестных) для обозначения буквой (буквами), от хода рассуждений можно составить различные уравнения по одной и той же задаче. В этом случае можно говорить о различных алгебраических способах решения этой задачи.

Вопрос о применении уравнений при решении задач в начальных классах в последнее двадцатилетие подвергся всестороннему обсуждению. В дискуссии на эту тему сторонники арифметических приемов, обосновывая необходимость решения задач в начальной школе только арифметическими способами, выдвигали две главные причины:

1. Ребенок до 10 лет, по их мнению, не может понять механизм уравнений, так как в этот период жизни у него преобладает конкретное мышление и ему недоступны обобщенные приемы суждений.

2. Традиционные приемы решения арифметических задач развивают у детей сообразительность и способствуют их умственному развитию.

Рассматривая эти обоснования и исследуя психические возможности детей, психологи пришли к выводу, что «уже ученики I - II классов могут полноценно усвоить описание значений величин и чисел посредством буквенной символики (работы Давыдова В. В., Фроловой Т. А., Минской Г.

И. и др.). В психологии имеются также данные, показывающие принципиальную доступность уравнений первой степени учащимся II - IV классов (исследование А. В. Скрипченко) и даже учащимся 1 класса, если уравнения были совсем простыми типа: a+x=b, a-x=b и т. п. (исследования В. В. Давыдова, А. А. Кирюшиной)».

Таким образом, отвергать использование уравнений при решении задач по причинам особенностей психического развития детей нельзя. Это обоснование проведенными исследованиями не подтвердилось.

Второй мотив - развитие сообразительности детей при решении задач традиционными арифметическими приемами можно признать лишь частично, так как решение типовых задач посредством этих приемов превращается в простое запоминание ребенком соответствующего способа решения данного типа задач. Кроме того, способность к обобщениям, которая развивается у детей при решении задач с использованием уравнений, содействует развитию мышления, пожалуй, в большей мере, чем арифметические приемы решения задач.

Результаты обсуждения вопроса об алгебраических и арифметических методах решения задач нашли свое выражение в современной программе и учебниках по математике. В них рекомендуется наряду с изучением арифметических приемов решения задач знакомить учеников I – IV классов, с алгебраическими способами решения, т. е. с решением задач с применением уравнений. Вот почему, для того чтобы показать детям практическое использование уравнений, уже при решении простых задач целесообразно некоторые из них решить с помощью составления уравнений. При решении составных задач алгебраический метод находит значительно более широкое применение.

Обучение решению задач с применением уравнений следует сделать более доступным для понимания детьми. Для этого решению задач посредством уравнений должна предшествовать основательная подготовительная работа в виде специальных упражнений с математическими выражениями. Подготовительные упражнения дают ученику возможность выразить ту или иную зависимость, выраженную словами, посредством математических символов, а это позволит ученику все условие задачи перевести па язык математики. А научить детей такому переводу - значит научить их алгебраическим приемам решения задач.

В качестве иллюстрации этого высказывания рассмотрим последовательный ход составления уравнения к одной из задач из начальной школы: «Из города к зимовке, расстояние между которыми 150 км, выехали аэросани со скоростью 60 км в час. В это же время навстречу им из зимовки вышел лыжник и встретил аэросани через 2 ч. Найди скорость лыжника».

Попытаемся показать, как эту задачу перевести на язык алгебры.

| Запись текста словами | Запись на языке алгебры |
|---|---|
| 1. За 1 ч лыжник проходил несколько километров | $x$ |
| 2. За 2 ч он прошел в 2 раза больше | $x \cdot 2$ |
| 3. Аэросани за 2 ч проехали в 2 раза больше 60 км | $60 \cdot 2$ |
| 4. Сколько километров лыжник и аэросани прошли за 2 ч? | $x \cdot 2 + 60 \cdot 2$ |
| 5. За 2 ч они прошли 150 км | 150 |
| 6. Задача выражается уравнением | $x \cdot 2 + 60 \cdot 2 = 150$<br>$x \cdot 2 + 120 = 150$<br>$x \cdot 2 = 150 - 120$<br>$x \cdot 2 = 30$<br>$x = 30 : 2$ |
| 7. Решив уравнение, найдем x = 15. Лыжник проходил за 1 ч 15 км | $x=15$ |

*Примечание.* Наименование, которое следует за буквой, записывать сокращенно нельзя, так как это может вызвать ошибку, например, х — это не х тонн, поэтому после буквы наименование не надо писать.

Из приведенного образца перевода задачи па язык алгебры следует, что объяснение решения составной задачи при составлении уравнения надо начинать именно так и подводить ученика к этому следует постепенно. Обычно решение составных задач алгебраически начинают после того, как дети уже освоятся с решением простых задач на нахождение неизвестных компонентов посредством уравнений.

Предлагая ученикам решить ту или иную задачу посредством составления уравнения, учителю следует помнить, что согласно программе в I - IV классах дети решают только простейшие уравнения. К простейшим уравнениям отнесены следующие виды (ниже приведены уравнения, записанные в общем виде, они расположены по степени их сложности).

II КЛАСС

1. $a + x = b$; $x + a = b$; $x = b - a$ Образец: $3 + x = 15$; $x + 2 = 15$; $x = 15 - 3$

2. $a - x = b$; $x - a = b$; $x = a + b$. Образец: $14 - x = 6$; $x - 8 = 6$; $x = 6 + 8$

III КЛАСС

3. $a \cdot x = b$; $x \cdot a = b$ Образец: $4 \cdot x = 36$; $x \cdot 4 = 36$

4. $a : x = b$; $x : a = b$ Образец: $84 : x = 12$; $x : 16 = 8$

5. $x \cdot a = b + c$; $a \cdot x = b - c$. Образец: $x \cdot 12 = 84 + 48$; $12 \cdot x = 84 - 48$.

6. $(x + a) - b = c$; $(a - x) + b = c$. Образец: $(x + 19) - 16 = 11$; $(13 - x) + 8 = 18$.

IV КЛАСС

7. $x \cdot a + b = c$; $b + a \cdot x = c$ Образец: $x \cdot 12 + 25 = 169$; $14 + 8 \cdot x = 78$.

8. $a : x = b - c$; $x : a = b + c$ Образец: $12 : x = 53 - 49$; $x : 11 = 8 + 4$.

9. $a : x - b = c$; $x : a + b = c$ Образец: $242 : x - 10 = 1$;

$x:5+14=20$

10. $(a+x):b=c$; $(x-a).\ b=c$ Образец: $(540+x):9=62$;

$(x-490)\cdot 5=400$.

Во II классах дети, решая уравнения и некоторые задачи с использованием уравнений, по сути дела только готовятся к решению задач алгебраически, т. е. с помощью составления уравнений. Основная работа по овладению решением задач с использованием уравнений в начальных классах относится на IV класс.

Во II, III классах ученики знакомятся с практическим использованием уравнений при решении простых задач (об этом уже говорилось выше). Когда второклассники овладеют этим умением, им предлагают более сложные задания, а именно: составить задачу в два действия по уравнению. К этому подходят так: после решения задачи с записью выражения, например $2\bullet (7+9)$, ученикам дают задание - составить задачу, похожую на решенную по уравнению. Уравнение подбирают сходное с полученным выражением, например $x - 6\bullet (4+2)$.

Чтобы ученикам легче было подобрать сюжет, учитель может сказать, что задачу составьте о покупке цветных карандашей. Опираясь на решенную задачу и указание учителя, они составляют примерно такую задачу: «Куплено 4 красных и 2 зеленых карандаша. Каждый карандаш стоил 6 р. Сколько заплатили за все карандаши?»

Так как уравнение к этой задаче дано, то при решении составленной задачи дети его используют и находят: $x = 6\bullet (4+2)$; $x= 6\cdot 6$; $x=36$ (руб.).

Значительно сложнее для учеников составить задачу по уравнению вида $76+x-32\cdot 3$. При выполнении подобного задания нужно дополнительное указание - например, составить задачу о числе книг, поставленных на трех полках. Такое указание значительно облегчит детям работу.

По данному уравнению ученики под руководством учителя могут составить, например, следующую задачу: «На трех полках стояло 76 книг. Когда на эти полки поставили еще несколько книг, то на каждой полке оказалось по 32 книги. Сколько книг поставили на полки?»

Имея уравнение, ученики найдут решение: $76+x= 32\cdot3$; $76+x=96$; $x=96-76$; $x=20$ (книг).

В IV классе посредством составления уравнений решают несколько видов задач. Наиболее легко составить по задаче уравнение в том случае, когда в условии имеется более или менее полное указание на путь составления уравнения. Например: «За три равноценных блокнота Петя уплатил 50 р. и получил 14 р. сдачи. Сколько стоит один блокнот?»

Немного сложнее составить уравнение к задаче, в которой нет прямого указания к составлению уравнения, но имеются слова, указывающие на

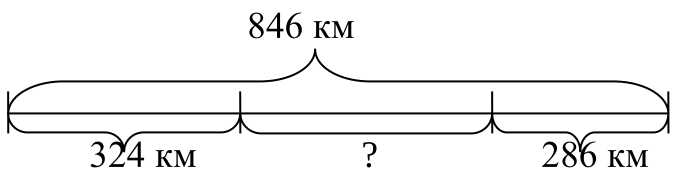



**Рис. 2**

равенство значений некоторых величин (одинаковый расход, равная стоимость, проехали одно и то же расстояние, купили по одинаковой цене или одинаковое количество, уплатили поровну и т. п.). Например: «На две машины погрузили по равному количеству яблок. На первую машину погрузили 33 ящика по 80кг в каждом, а на вторую - несколько мешков по 60кг в каждом. Сколько мешков яблок погрузили па вторую машину?»

Уравнение: $80\bullet33 = 60\bullet x$

Еще сложнее составить уравнение к задаче, в тексте которой нет указаний на равенство двух выражении или значений одном и тон же величины, а эти указания выявляются лишь после анализа условия и вопроса задачи. Обычно к такой задаче можно составить несколько уравнений. Примером такой задачи может служить следующая: «Из двух городов, расстояние между которыми 846 км, вышли навстречу друг другу два поезда. Какое расстояние между поездами, когда один пройдет 324км, а другой 286км?

Подобные задачи целесообразно иллюстрировать схематическими чертежами, что облегчает детям понять и решить задачу. Рассматривая иллюстрацию, ученики замечают, что 846 и сумма чисел 324+286+х выражают одно и то же расстояние. Поэтому 846 является суммой слагаемых 324+2864+х, получают уравнение 324+286+х=846. Уравнение можно составить иначе, представив равенство разности 846-х и суммы 324+286, т. е. 846 - х = 324+286. Составление этого уравнения сложнее первого. Решение любого из составленных уравнений даст ответ па вопрос задачи: х=236 (км).

Подготовку к решению составных задач посредством уравнений в III классе начинают при повторении с решения простых задач, подобных тем, которые решались во II классе. А дальше переходят к составлению уравнений по тексту, в котором дано полное указание о действиях с данными числами и неизвестным. Например: «Удвоенное неизвестное число равно разности чисел. 41 и 17. Найти неизвестное число.»

Ученики, опираясь па свои знания о математических выражениях, без особого труда могут записать по данному тексту равенство: 2·х=41 - 17. Здесь учителю следует обратить внимание на то, что полученное равенство составлено из двух выражений, в которое входит неизвестное число. Такое равенство двух выражений, в котором содержится неизвестное число, называют уравнением. Решить его - значит найти, при каком значении неизвестного равенство будет верным.

Под наблюдением учителя дети сначала упрощают составленное уравнение и получают 2•х=24, а затем находят значение неизвестного, пользуясь правилом - один из множителей равен частному от деления произведения на второй множитель: х=24:2; х=12. Уравнение следует проверить, подставив в первоначальное равенство найденное значение неизвестного. Подобные упражнения играют роль переходного мостика от решения простых задач к решению с помощью уравнений составных задач.

Но, прежде чем переходить к решению составных задач с помощью уравнений, полезно составить с учениками задачу по данному уравнению. Учитель записывает на доске уравнение 3•х=15 - 9 и предлагает ученикам подумать, как по этому уравнению составить задачу о покупке карандашей мальчиком, у которого было 15 руб.

Дети коллективно выясняют, что означают числа, вошедшие в данное уравнение: 3 - цена карандаша, 15 руб. - уплатил мальчик в кассу, 9 руб. - сдача, которую он получил из кассы, x - неизвестное число карандашей, купленных мальчиком. По предложению учителя, один из учеников формулирует задачу: «Сколько карандашей ценой по 3 руб. купил Ваня, если он дал в кассу 15 руб. и получил 9 руб. сдачи?»

Дети устанавливают, соответствует ли составленная задача данному уравнению, затем, используя это уравнение, находят значение x. Получив значение x, решение проверяют. Для проверки этой задачи составляют и решают обратную задачу, в которой искомым будет сдача. После этого ученикам можно предложить составить к подобной, задаче уравнение и выполнить решение.

В качестве такой задачи можно взять следующую: «Для посадки в саду яблонь привезли 28 саженцев. Их посадили в несколько рядов по 8 штук в ряд. 4 саженца оказались бракованными и их выбросили. Сколько рядов заняли посаженные яблони?»

Анализ задачи имеет цель найти два равных выражения, или два равных значения одной и той же величины - число посаженных яблонь. Первое выражение 28 - 4, второе - $8 \cdot x$, где x - число рядов посаженных яблонь. Оба эти выражения равны, так как указывают одно и то же число. На этом основании составляем уравнение: $8 \cdot x = 28 - 4$.

При решении этого уравнения сначала находим разность, получим $8 \cdot x=24$, а затем, используя правило, выражающее значение неизвестного множителя, находим: $x=24 : 8$; $x=3$. Чтобы дать ученикам конкретное представление о всех членах уравнения, предложим им решить задачу, которую легко иллюстрировать рисунком или чертежом. Возьмем задачу: «Вдоль глухой степы нужно отвести прямоугольную площадку для игр и обнести ее с трех сторон ограждением, длина которого 286 м.

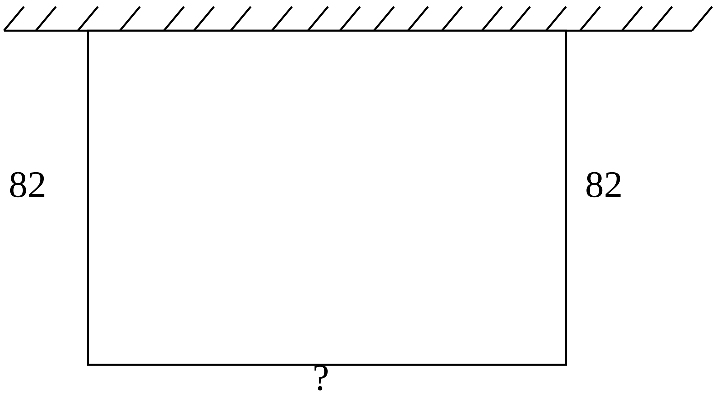



**Рис. 3**

Какой должна быть длина площадки, если ширина ее 82 м?»

Ознакомившись с задачей и разобрав ее, ученики делают чертеж и обозначают известные стороны площадки числами, а неизвестную сторону буквой (рис. 3).

Из чертежа выясняется, как можно записать длину трех сторон площадки: $x + 82 \cdot 2$, но она по условию выражена длиной ограждения, т. е. числом 286. Указанное выражение и число 286 равны, так как это одна и та же длина ограждения; следовательно, можно записать уравнение $x + 82 \cdot 2 = 286$.

Упрощая уравнение, получим: $x+164 = 286$. Зная, что неизвестное слагаемое равно сумме без второго слагаемого, найдем: $x=286-164$; $x=122$.

Для проверки уравнения ученики подставляют значение x и получат верное равенство: 286 = 286. Для проверки же задачи составляют обратную задачу, приняв, по указанию учителя, за неизвестное ширину площадки. Обратную задачу следует решить также посредством уравнения.

В дальнейшей работе с задачами целесообразно взять для решения посредством уравнений несколько задач следующего характера: «За 4 тетради и книгу мальчик заплатил 74 руб. Книга стоит 66 руб. Сколько стоит тетрадь?»

В этой задаче за неизвестное удобно взять цену тетради. Тогда 4 тетради будут стоить $x \cdot 4$, а задачу можно представить в такой записи:

$$\left.\begin{array}{l}\text{4 тетради - } x\cdot 4 \\ \\ \text{Книга – 66 руб.}\end{array}\right\}\text{ 74 руб.}$$

По этой записи видно, что сумма стоимостей книги и тетрадей составляет 74 руб., поэтому можно составить уравнение

$$x\bullet 4+66=74$$

Найдем значение x:

$$x\cdot 4=74-66;\quad x\cdot 4=8;\quad x=8:4;\quad x=2 \text{ (руб.)}.$$

Проверив решение уравнения, следует проверить и решение задачи. Ответ: цена тетради 2 руб.

Умение выделять в задаче данные и искомое, находить в ней 2 равных значения одной и той же величины и записывать эти значения различными выражениями у школьников складывается не сразу. Выработке этих умений поможет рассмотрение последовательно одна за другой нескольких задач с однотипными уравнениями, но разного содержания. Подбирать и предлагать для решения подобные задачи следует с учетом нарастания сложностей. Приводим примерную подборку задач, близких по своему характеру разобранным выше.

1. На уборку спортивной площадки пришло 30 учеников III класса, 40 учеников II класса и несколько учеников I класса. Всего на уборке спортивной площадки работало 80 учеников. Сколько первоклассников приняло участие в уборке?

Выражение «несколько учеников I класса» подсказывает детям обозначить их число буквой x. Тогда число учеников, убиравших площадку, можно выразить суммой 30+40+x. В условии же сказано, что работало 80 учеников, поэтому можно приравнять эти выражения и записать уравнение: 30+40+x=80.

При решении два первых слагаемых заменим их суммой и получим уравнение 70+х=80, решение которого уже не затруднит третьеклассников.

2. Скольким ученикам следует возвратить деньги за билеты в театр, если по предварительному заказу за билеты уплатили 14 учеников I класса. Из них несколько человек в театр не пошли, но зато присоединилось 6 учеников II класса. Всего в театре присутствовало 18 учеников I и II классов.

Здесь изменена структура задачи (вопрос поставлен в начале условия). Это изменение осложнит ученикам повторение условия и вопроса задачи, по оно поможет им совершенствовать умение выделить в задаче данные и искомые.

Уравнение к этой задаче будет таким: 14+6-х=18.

При его решении ученики могут заменить два известных слагаемых их суммой, что значительно упростит решение.

3. Из одной школы на спортивные соревнования приехала команда в составе 12 мальчиков и 8 девочек. В соревнованиях из этой команды участвовало 16 спортсменов. Сколько учеников из команды было запасными?

В приведенной задаче нет прямого указания, что принять за неизвестное, поэтому дети могут решить эту задачу арифметически (12+8-16 = 4). Однако после арифметического решения полезно с учениками установить, что если в этой задаче принять за неизвестное искомое число, т. е. число запасных спортсменов обозначить буквой х, тогда можно составить следующее уравнение: 12+8 – х=16.

4. Сколько учеников было на елке, если на ней, кроме учеников, было 10 человек взрослых? Когда 20 учеников находились на сцене, то в зале было занято 80 мест взрослыми и детьми.

Структура этой задачи преследует цель: приучить детей выделять условие и вопрос при любой формулировке задачи. Если задачу решать алгебраически, то за неизвестное число принимают число учеников, присутствовавших на елке. Тогда получим уравнение: х+10 – 20=80

Целесообразно после решения каждой из предложенных задач проверить значение неизвестного и решение задачи, решив ее другим способом.

Следующая группа задач, решаемых в IV классе с применением уравнений,- это задачи, в которых хотя нет прямого указания на отношение равенства, но его можно подметить.

Вот одна из таких задач: «Для детского сада решили купить несколько одинаковых игрушек. Игрушечный танк стоит 4 руб., а электровоз на 1 руб. дешевле. Сколько электровозов можно купить, уплатив 24 руб.?»

Анализ задачи сводится к тому, что ученики выясняют, какие величины упоминаются в ней - цена, стоимость, количество, значения каких из них известны (стоимость) и какое значение величины выступает искомым (количество). Значение какой величины, не изменяясь, выступает в задаче дважды (цена).

Если обозначить количество электровозов буквой x, то за один электровоз надо уплатить 24 : x рублей - это цена электровоза. По условию цену электровоза можно выразить иначе: 4 - 1. Оба выражения - и первое и второе равны, так как указывают цену одной и той же игрушки. Составим уравнение: 24 : x=4-1, откуда 24 : x = 3; x=24 : 3; x=8.

К этой задаче можно составить уравнение и по-другому, выразив не цену, а стоимость купленных игрушек. Цена 4- 1, количество x, тогда стоимость (4 - 1) • x=24; x=8. Ученикам следует предоставить возможность выбирать путь решения по своему усмотрению.

Рассмотрим задачу, в которой равенство двух выражений выявляется только при подробном анализе: «На лесном складе за неделю нужно было нагрузить 228 вагонов. В первые 3 дня ежедневно грузили по 24 вагона. По скольку вагонов должны грузить ежедневно в следующие 4 дня, чтобы выполнить задание?»

Поиск решения задачи начинается с того, что устанавливаем: надо нагрузить 228 вагонов в 2 приема - в первые 3 дня грузили по 24 вагона, а число вагонов, которые надо нагрузить ежедневно в последующие 4 дня, неизвестно. Обозначим это число буквой x. Тогда задачу можно записать так:

3 дня по 24 вагона
всего 228 вагонов
4 дня по х вагонов

Произведение 24·3 выражает число вагонов, нагруженных за 3 дня; также произведение х•4 даст число вагонов, -нагруженных за 4 дня. Всего надо нагрузить 228 вагонов, или 24•3+х·4. Оба этих выражения равны, поэтому 24•3+х·4 = 228. Решение уравнения: 72+х·4 = 228; х·4 = 228-72; х=156:4; х=39. Решение уравнения и решение задачи следует проверить.

В некоторых случаях задачу до составления уравнения полезно трансформировать, чтобы упрощенная задача дальше могла бы быть решена посредством несложного уравнения.

Проследим это на одной задаче: «Мастер делает 120 деталей за 8 ч. А когда он работает со своим учеником, то столько же деталей они успевают сделать за 5 ч. Сколько деталей в час делает ученик?»

Анализируя задачу, ученики выясняют, какие величины в ней упомянуты (время работы, число деталей или количество и производительность в час), какие значения первой величины и какие значения второй величины известны, значение какой величины искомое (производительность ученика или его выработка - искомое).

Помогая детям разобраться в задаче, учитель задает вопросы: Что в задаче надо узнать? О чем идет речь в задаче? (О работе мастера и работе ученика.) О какой работе говорится в задаче? (О совместной работе мастера и ученика.)

- Одинаково ли время работы только для мастера и для совместной работы его ученика указано в задаче?

- Нет. Мастер один работает 8 ч, а. вместе с учеником - только 5 ч.

- Как можно сравнить их работу? Что для этого надо узнать?

- Чтобы сравнить совместную работу мастера и ученика с работой одного мастера, надо узнать, сколько деталей в час сделает мастер и сколько деталей в час они сделают вместе.

Дети находят, что за 1 ч один мастер изготавливает деталей 120:8=15, а вместе с учеником, тоже за 1 ч, они делают деталей больше, т. е. 120:5 = 24.

Сделав такой расчет, задачу можно значительно упростить, а именно: «Мастер изготавливает в час 15 деталей, а работая вместе с учеником, они делают в час 24 детали. Сколько деталей в час делает ученик?» К этой преобразованной задаче ученики довольно легко составят уравнение 15+х=24 и найдут х = 9.

Для проверки полезно рассмотреть другие способы решения предложенной задачи. Сопоставить их, дети укажут, какой способ рациональнее других.

Во многих случаях решение задачи посредством уравнения требует иной предварительной подготовки. Довольно часто эта подготовка сводится к решению вспомогательной задачи, которая позволяет школьникам уяснить отдельные этапы решения последующей, более сложной задачи. Так, предлагая задачу «На пришкольном огороде прямоугольной формы выделены два опытных участка одинаковой площади. Длина первого участка 30м, а ширина 28м. Чему равна длина второго участка, если его ширина 20м?» следует напомнить, как найти площадь прямоугольника и как по площади и ширине прямоугольника найти его длину. Для этого учитель до решения указанной задачи даст ученикам задание устно вычислить площадь прямоугольника, если его длина 9 м, а ширина 7 м, затем предложит им узнать длину прямоугольника, площадь которого 72 кв.м а ширина 8 м.

Решение указанных задач восстановит в памяти учеников те сведения, которые им потребуются для решения следующей задачи: Анализ условия задачи выявит соотношение между значениями величин, вошедших в нее, и позволит сделать следующую запись:

площ. I уч.- 30·28

площ. II уч. - х·20

площ. I уч. = площ. II уч

Такая запись помогает составить уравнение, так как указывает на равенство двух составленных выражений. Получим: х•20 =30 •28.

При решении задач с использованием уравнений не всегда искомое по условию задачи удобно принять за неизвестное и ввести его в уравнение. В качестве примера такой задачи может служить задача: «Школьники совершили экскурсию по реке на катере, проплыв всего 66км. 2 ч они плыли со скоростью 18км в час, а остальной путь со скоростью 15км в час. Сколько времени находились в пути?»

Если искомое число - время нахождения в пути - принять за неизвестное х, то окажется: за 2 ч пути школьники проплыли $18 \bullet 2$ (км).

Остальное время ($x-2$) часов они плыли со скоростью 15км в час и проплыли за это время — $15 \bullet (x - 2)$ километров, а всего проплыли 66 км. Отсюда получим уравнение $18 \bullet 2 + 15 \bullet (x - 2) = 66$, решить которое ученикам IV класса не по силам. Поэтому к решению этой задачи следует подойти иначе, приняв за неизвестное (х) время, в течение которого они плыли со скоростью 15 км в час. Тогда:

за 2 ч школьники проплыли $18 \cdot 2 = 36$ | или $\left.\begin{array}{l} 18 \cdot 2 = 36 \\ 15 \cdot x \end{array}\right\}$ 66

за х ч они проплыли $15 \cdot x$ | $15 \cdot x$

Всего они проплыли 66 км

Приравняв сумму ($36+15 \bullet x$) к числу 66, получим уравнение

$36+15 \cdot x = 66$.

Решение: $36+15 \cdot x;=66$; $15 \cdot x=66-36$; $15 \cdot x=30$; $x= 30 : 15$; $x = 2$.

Но значение неизвестного числа из этого уравнения не служит ответом на основной вопрос задачи. Время нахождения школьников в пути составляет в часах ($2+x$) или $2+x=2+2$; $2+x=4$

Ответ: 4 ч находились школьники в пути. Процесс составления уравнения, а главное, само уравнение во втором случае значительно проще, нежели в первом.

При решении задач, подобных по сложности этой, полезно после получения ответа снова рассмотреть все и убедиться, нет ли более рационального способа решения.

Разбор решения задачи, после того как оно выполнено, позволяет ученику оценить выбранный путь и, если он сложен, поискать более простой и короткий. Учитель не должен забывать, что его цель - научить школьников решать задачи и осознанно выбирать самый короткий и легкий способ. Рациональный ход решения выявляется, не сразу, а только после тщательного анализа содержания и решения различными путями одной и той же задачи.

Из приведенных примеров решения задач с использованием уравнений можно заметить, что проверки решений уравнения и задачи - это разные проверки. Первая позволяет установить, правильно ли найден корень (значение неизвестного), удовлетворяет ли он уравнению, т. е. выяснить, будет ли числовое значение правой части равняться числовому значению левой части уравнения при подстановке значения неизвестного (корни) и выполнении всех действий отдельно в правой и в левой частях уравнений.

Проверка же решения задачи позволяет установить, удовлетворяет ли найденный в процессе решения ответ условию задачи, правильно ли он отвечает на основной вопрос задачи.

При решении задач с использованием уравнений, как и при решении их другими способами, неизбежно, что некоторые ученики будут допускать ошибки. При обучении важно, чтобы учитель не проходил мимо, не отметив этих ошибок. Он обязан внимательно рассмотреть причины появления каждой ошибки. Установив причины возникновения той или иной ошибки, учитель сможет сделать необходимые педагогические выводы, наметить пути предупреждения и изжития этих ошибок на последующих уроках.

Как установлено исследованием Н. А. Менчинской, дети часто допускают ошибки в решении задач из-за недостаточной связи в их деятельности первой и второй сигнальных систем, т. е. из-за несоответствия словесного, или символического, выражения и истинного понятия, которое вложено - в это выражение. Это своеобразный разрыв теории с практикой. С целью предупреждения ошибок, появляющихся по этой причине, учителю следует выяснять, как понимают ученики то или другое выражение или термин, содержащиеся в условии или вопросе задачи. Например: если тетрадь дешевле блокнота на 6 руб., то что можно сказать про цену блокнота по сравнению с ценой тетради; или если книга дешевле альбома в два раза, то что можно сказать про цену альбома по отношению к книге, как это записать и т. п.

До ознакомления с содержанием задачи учитель должен проверить, понимают ли дети те специфические термины или отдельные новые для них слова и выражения, которые встретятся в условии задачи. Выяснение всех туманных для учеников мест в задаче еще до чтения условия позволит им избежать многих ошибок при решении.

Помимо рассмотренных способов решения задач, школьников полезно познакомить с другими способами.

Кроме арифметических и алгебраических способов решения текстовых задач, в математике используются и другие способы.

***Рассмотрим задачу:*** Из двух пунктов навстречу друг другу вышли два пешехода. Первый прошел 5/8 пути, второй 3/10 . Произошла ли встреча пешеходов?

Изобразим произвольным отрезком расстояние между пунктами (рис. 4).Опираясь на теорему Фалеса, разделим отрезок на 8 и на 10 равных частей.

Опираясь только на чертеж, легко дать ответ на вопрос задачи: «Встреча не произошла». Такой способ решения можно назвать графическим.

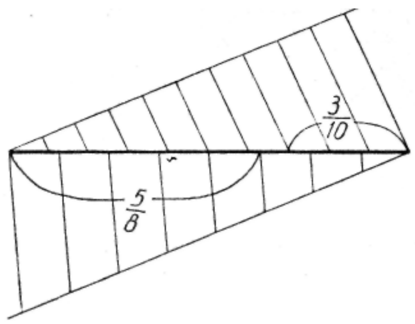



Рис. 12

**Рис.4.**

Иногда решение задачи графическим способом связано не только с построением отрезков, но и с измерением их длин.

***Задача.*** Пионерское звено в один день посадило у школы 3 тополя и 5 берез, а во второй день — тополей столько же, а берез на 2 меньше. Сколько деревьев посадило звено за два дня?

Условимся изображать каждое дерево отрезком в 1 см. Тогда все деревья, посаженные за два дня, можно изобразить в виде отрезка *AB* (рис. 5.).

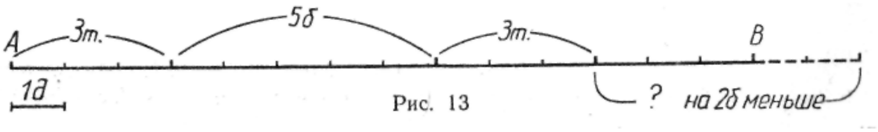


Рис. 13

**Рис.5.**

Измерив отрезок, изображающий все деревья, получим ответ на вопрос задачи: «За два дня пионерское звено посадило 14 деревьев».
Некоторые задачи можно решить, выполняя действия с предметами.
Рассмотрим ***задачу***: «В совхозе 40 автомашин - легковых и грузовых, причем на каждую легковую машину приходится 4 грузовые. Сколько легковых и сколько грузовых машин в совхозе?»

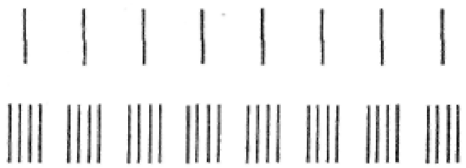


Рис. 14

**Рис.6.**

Изобразим каждую машину палочкой (40 машин — 40 палочек). Известно, что на каждую легковую машину приходятся 4 грузовые. Поэтому отложим одну палочку — это легковая машина. Под ней положим 4 палочки - это 4 грузовые машины. Будем поступать так до тех пор, пока все 40 палочек не окажутся разложенными. Чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно сосчитать, сколько палочек положено в верхнем ряду и сколько палочек положено в нижнем ряду (рис. 6).

Такое решение можно назвать ***практическим.*** Это еще один из способов решения текстовых задач.

В наглядно-геометрическом способе решения целое можно изобразить не только прямоугольником, но и отрезком или, например, кругом, от части целого в последнем случае – секторы. Предлагая школьникам для решения задачи, дошедшее до нас из глубины веков, можно на занятиях обратиться к вопросам развития математики, как науки, а так же рассказать ученикам о результатах, которые были получены известными учёными много веков назад.

## 3 Основные этапы работы над задачей

Деятельность по решению задачи арифметическим методом включает следующие основные этапы: анализ задачи, схематическая запись задачи, поиск способа решения, план решения, осуществление плана решения, анализ решения, исследование задачи, проверка правильности решения и формулирование ответа. Схематически это можно представить следующим образом (рис.7).

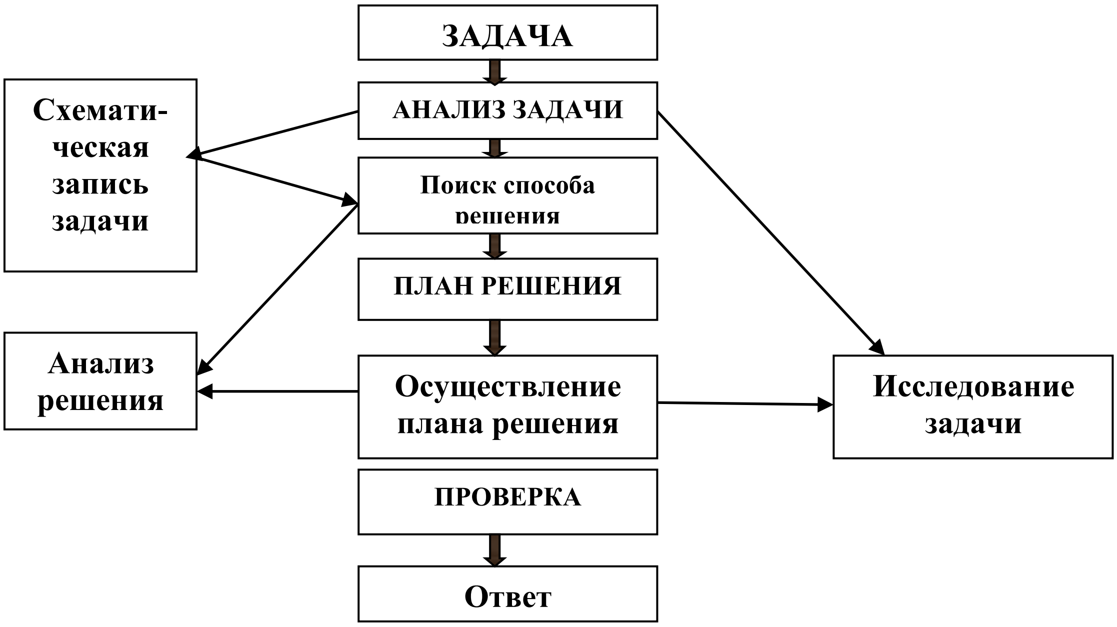



**Рис. 7.** Схема анализа задачи.

В реальном процессе решения задачи названные этапы не имеют четких границ и не всегда выполняются одинаково полно.

Основное назначение I этапа (анализ задачи) — понять в целом ситуацию, описанную в задаче; выделить условия и требования; назвать известные и искомые объекты, выделить все отношения (зависимости) между ними.

Назначение II этапа (поиск способа решения): установить связь между данными и исходными объектами, наметить последовательность действий. Одним из наиболее известных приемов поиска плана решения задачи арифметическим способом является разбор задачи по тексту или по ее вспомогательной модели. Используются традиционные приемы разбора задачи:

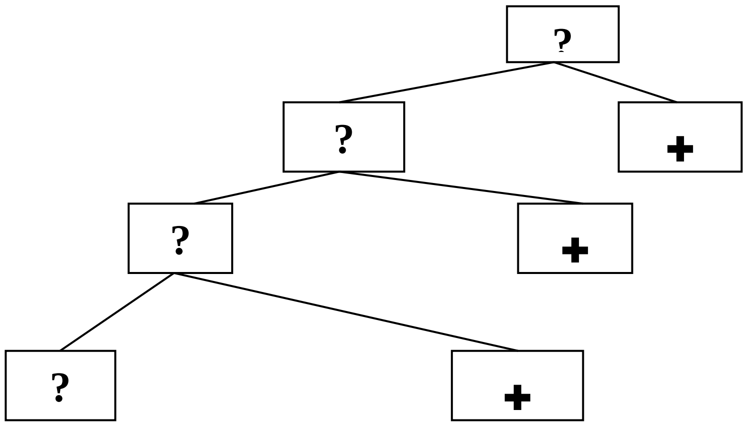
♦разбор от вопроса;

♦разбор от числовых данных.

Разбор задачи от вопроса — это суждение, которое состоит в том, чтобы подобрать два числовых значения одной или разных величин таким образом, чтобы дать ответ на вопрос задачи.

Одно из значений или оба могут быть неизвестными, для их нахождения подбираются два других. Так продолжается до тех пор, пока не приходим к известным числовым значениям величин.

В результате такого разбора учащиеся устанавливают зависимость между числовыми значениями величин, расчленяют задачу на простые и составляют план ее решения. Схематически это можно представить (рис. 8):




**?** – неизвестное число

**✚** - известное число

**Рис.8.** Схема разбора задачи.

Разбор задачи от числовых данных состоит в том, что к двум числовым данным подбирается вопрос. Затем к следующим двум данным, одно из которых может быть результатом первого действия, подбирается еще один вопрос. И так до тех пор, пока не будет получен ответ на вопрос задачи.

В методической литературе разбор задачи от числовых данных называется «синтетическим методом», а разбор задачи от вопроса — «аналитическим методом». Оба метода разбора есть анализ условия задачи, поскольку они направлены на расчленение основной задачи на  простые.

Наибольшую сложность в процессе решения текстовой задачи представляет перевод текста с естественного языка на математический. Чтобы облегчить эту процедуру, строят вспомогательные модели. Тогда процесс решения задачи можно рассматривать как переход от одной модели к другой: от словесной модели к реальной ситуации, представленной в задаче, к вспомогательной (схемы, таблицы, рисунки и т.д.); от нее - к математической, на которой и происходит решение задачи.

На рисунке 9 представлена классификация вспомогательных моделей .

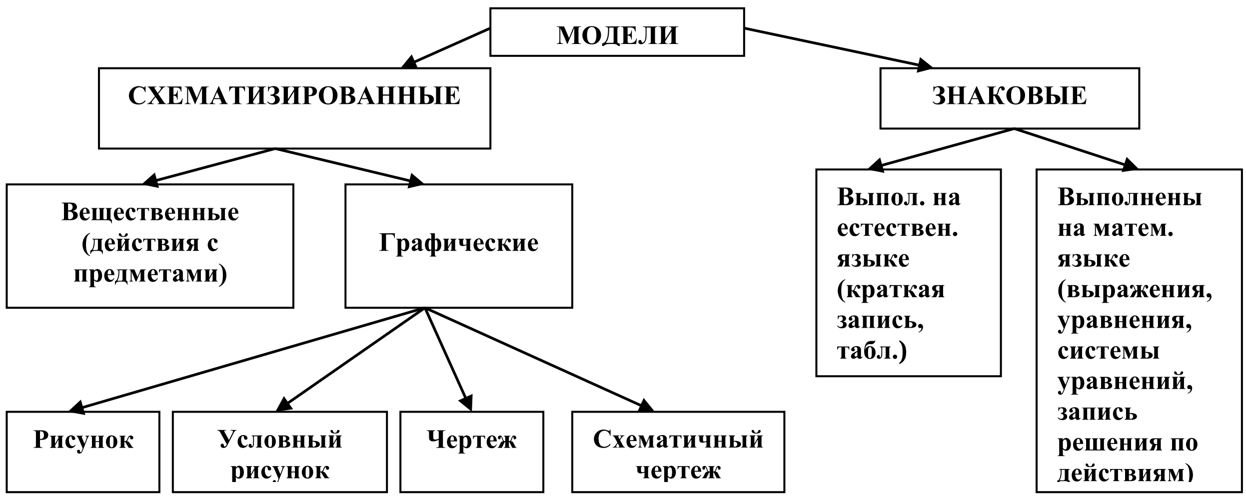


**Рис.9.** Классификация вспомогательных моделей.

Все модели можно разделить на схематизированные и знаковые по видам средств, используемых для их построения.

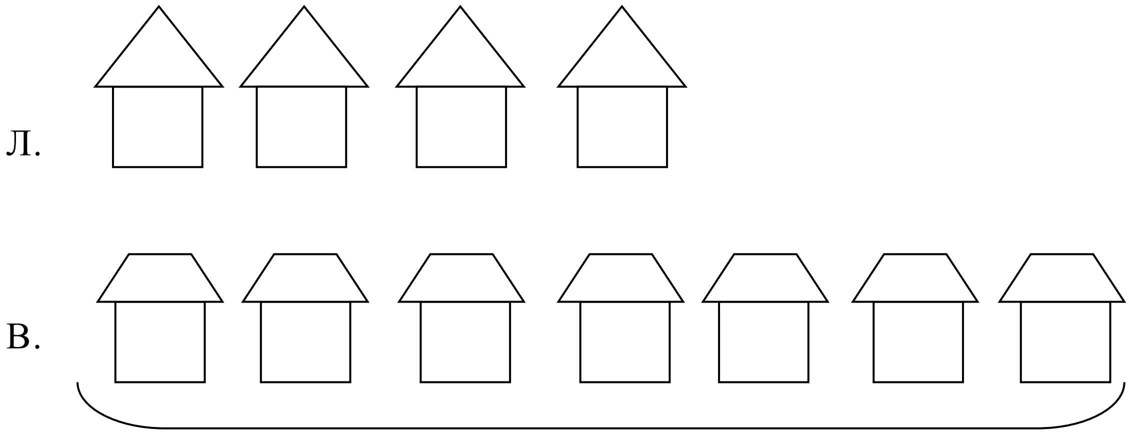
Схематизированные модели, в свою очередь, делятся на вещественные и графические в зависимости от того, какое действие они обеспечивают. Вещественные (или предметные) модели текстовых задач обеспечивают физическое действие с предметами. Они могут строиться из каких-либо предметов (пуговиц, спичек, бумажных полосок и т.д.), они могут быть представлены разного рода инсценировками сюжета задач. К этому виду моделей причисляют и мысленное воссоздание реальной ситуации, описанной в задаче, в виде представлений.

Графические модели используются, как правило, для обобщенного, схематического воссоздания ситуации задачи. К графическим следует отнести следующие виды моделей:

- рисунок;
- условный рисунок;
- чертеж;
- схематизированный чертеж (схема).

Разъясним суть этих моделей на примере задачи: «Лида нарисовала 4 домика, а Вова на 3 домика больше. Сколько домиков нарисовал Вова?»

Рисунок в качестве графической модели этой задачи имеет вид .



?

**Рис.10.** Рисунок.

Условный рисунок может быть таким, как на рисунке 11.

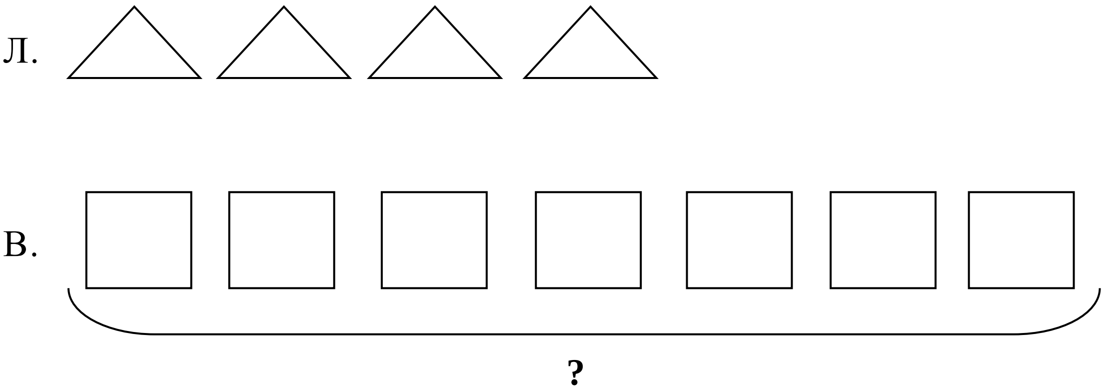



**Рис.11.** Условный рисунок.

Чертеж как графическая модель выполняется при помощи чертежных инструментов с соблюдением заданных отношений (рис.12).

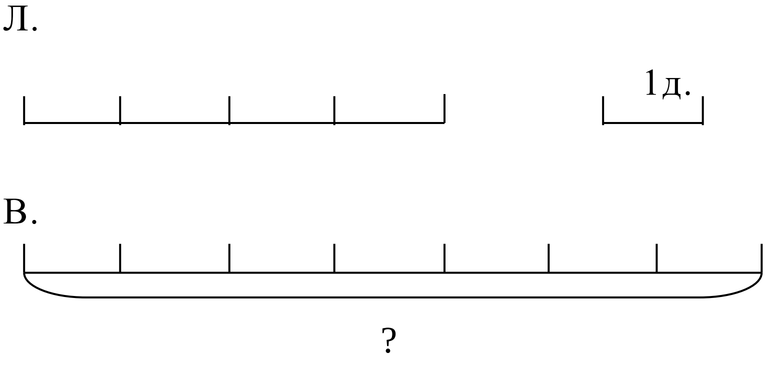
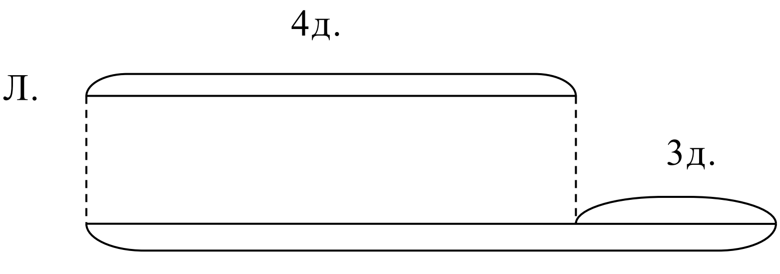



**Рис.12.** Чертеж.

Схематический чертеж (схема) может выполняться от руки, на нем указываются все данные и искомые (рис. 13).



В.

?

**Рис.13.** Схематизированный чертеж.

Знаковые модели могут быть выполнены как на естественном, так и на математическом языке. К знаковым моделям, выполненным на естественном языке, можно отнести краткую запись задачи, таблицы. Например, краткая запись задачи о домиках Лиды и Вовы может быть такой:

Л. – 4 д.

В. - ?, на 3д. больше, чем

Знаковая модель, выполненная на математическом языке, может быть такой:

Л. – 4 д.

В. - ?, (4 + 3)д.

Таблица как вид знаковой модели используется главным образом тогда, когда в задаче имеется несколько взаимосвязанных величин, каждая из которых задана одним или несколькими значениями. Пример такой таблицы

| **Цена** | **Количество** | **Стоимость** |
|---|---|---|
| одинаковая | 5кг<br>7 кг | 56 руб.<br>? |

Знаковыми моделями текстовых задач, выполненными на математическом языке, являются: выражения, уравнения, система уравнений, запись решения задачи по действиям. Поскольку на этих моделях происходит решение задачи, их называют *решающими* *моделями*. Остальные модели, все схематизированные и знаковые, выполненные на естественном языке, - это *вспомогательные модели,* которые обеспечивают переход от текста задачи к математической модели.

Для большинства текстовых задач приходится строить различные вспомогательные модели. С одной стороны, эти модели представляют собой результат анализа задачи, но с другой — построение таких моделей организует и направляет детальный и глубокий анализ задачи.

Хочется сказать о важности использования моделирования в процессе решения текстовых задач, о его значении в поисках разных способов решения, выявлении лишних данных в задаче, обобщении теоретических знаний. Активизируя мыслительную деятельность учащихся с использованием моделирования, необходимо научить их:

♦составлять задачи по моделям;

♦устанавливать соответствие между содержанием задачи и схематическим рисунком, чертежом;

♦ выбирать из данных задач ту, которая соответствует рисунку, чертежу;

♦выбирать из нескольких схематических рисунков, чертежей тот, который соответствует данной задаче;

♦определять по рисунку, чертежу все арифметические способы, которыми может быть решена данная задача.

Используя графическое моделирование, учитель обеспечивает более качественный анализ задачи, осознанный поиск ее решения, обоснованный выбор арифметического действия; организует творческие задания по преобразованию задачи, установлению условий, когда задача не имеет решения; помогает организовать индивидуальный подход при изучении текстовых задач.

Назначение III этапа (осуществление плана решения задачи) — найти ответ на требование задачи, выполнив все действия в соответствии с планом.

Для текстовых задач, решаемых арифметическим способом, используются следующие приемы:

♦запись по действиям (с пояснением, без пояснения, с вопросами);

♦запись в виде выражения.

Назначение IV этапа (проверка решения задачи) — установить правильность или ошибочность выполнения решения.

Известно несколько приемов, помогающих установить, верно ли решена задача. Основные приемы:

♦установление соответствия между результатом и условиями задачи;

♦ решение задачи другим способом;

♦составление обратной задачи.

Если задача решена первоначально арифметическим способом, то правильность ее решения можно проверить, решив задачу либо другим арифметическим образом, либо алгебраическим.

Хочется обратить внимание на то, что решение задачи - исключительно ценный творческий процесс, совершаемый учащимися, и долг каждого учителя организовывать и направлять этот процесс. При этом важно стимулировать и поощрять поиски различных путей решения задач, обсуждать с учащимися предложенные способы решений, правильно их оценивать. Начинать такую работу следует как можно раньше.

## 4. Методика решения составных задач

Рассмотрим примеры решения составных задач.

Рассмотрим различные способы решения одной старинной русской задачи.

**Задача.** Летела стая гусей, а навстречу ей один гусь. «Здравствуйте, 100 гусей», - говорит он, а вожак стаи отвечает: «Нас не 100 гусей. Если бы нас было столько, сколько теперь, да еще столько, да еще пол столько, да еще четверть столько, да еще ты, гусь, то нас было бы ровно 100 гусей».

Сколько гусей было в стае?

*Решение.*

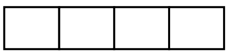
Арифметический способ.

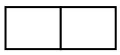
100 гусей можно выразить как $2\frac{3}{4}$ стаи да еще один гусь ($2\frac{3}{4} = 1 + 1 + 1/2 + 1/4$).

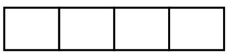
Тогда $2\frac{3}{4}$ стаи – это 99 гусей, откуда находим, что в стае $99 : 2\frac{3}{4} = 36$ гусей.

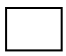
Наглядно-геометрический способ.

Изобразим стаю гусей в виде прямоугольника. Его размеры можно выбирать произвольно, но так как нам надо будет изображать половину и четверть стаи, то удобно взять изображать половину и четверть стаи, то удобно взять его длину, равную 4 клеткам или 4 см.

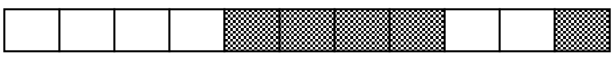
 - стая

 - половина стаи;

 - стая

 - четверть стаи.

По условию задачи стаю, да еще одну стаю, да еще пол стаи и четверть стаи можно изобразить так:



Большой прямоугольник изображает 99 гусей, а в нем 11 четвертей статьи. Значит, одна четверть стаи – это 9 гусей. В большом прямоугольнике 4 четверти, поэтому в стае $9 \bullet 4 = 36$ гусей.

Способ подбора (или «гадательно-подбирательный»).

Попробуем подобрать ответ. В задачах такого рода, как правило, используются только целые числа. Следовательно, область поиска резко ограничивается. Так как в условии встречается упоминание о половине и четверти стаи, то будем предполагать, что число гусей в стае делится на 4, а значит, и на 2. Число гусей не может быть более 40, в этом убеждаемся с помощью простых вычислений:

$$40 + 40 + 20 + 10 + 1 > 100$$

Это число не может быть и слишком маленьким, оно больше, например, 24:

$$24 + 24 + 12 + 6 + 1 < 100$$

Осталось проверить три варианта: 28, 32 и 36, из которых верен только один:

$$36 + 36 + 18 + 9 + 1 = 100.$$

*Ответ:* в стае 36 гусей.

**Задача «Жизнь Диофанта».** По преданию, на могильном камне имелась такая надпись:

«Путник! Под этим камнем покоится прах Диофанта, умершего в глубокой старости. Шестую часть своей долгой жизни он был ребенком, двенадцатую – юношей, седьмую – провел неженатым. Через 5 лет после женитьбы у него родился сын, который прожил вдвое меньше отца. Через четыре года после смерти сына уснул вечным сном и сам Диофант, оплакиваемый своими близкими. Скажи, если умеешь считать, сколько лет прожил Диофант?»

*Решение.*

Алгебраический способ.

Пусть Диофант прожил *x* лет. Тогда получим уравнение

$x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/5 + 4 = x$,

корень которого x = 84.

Наглядно-геометрический способ.

Так как в задаче речь идет о 1/6, 1/12, 1/7 и 1/2 частях жизни, то число лет, прожитых Диофантом, надо делить на 6, 12, 7 и 2. Изобразим всю жизнь Диофанта в виде прямоугольника размером 7×12 клеток (рис. 13 ).

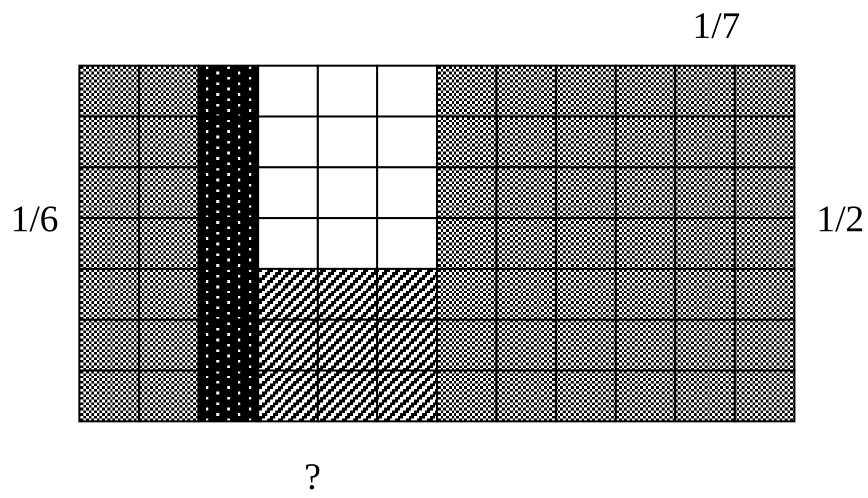



**Рис. 13.**

Тогда 1/6, 1/12 и 1/2 части жизни изобразить легко; 1/7 = это полоска размером 1×12, т.е. 12 клеток, значит, 1/7 жизни можно изобразить. Например, прямоугольником 3×4 клетки. Оставшаяся заштрихованная часть из 9 клеток соответствует 9 годам жизни Диофанта (4+5 = 9).

Итак, одна клетка соответствует одному году жизни, всего же получится 7•12 = 84 клетки.

*Ответ*. 84 года прожил Диофант.

**Задача.** Капитан на вопрос о том, сколько людей в его команде, ответил: «2/3 моей команды в карауле, 2/7 - в работе, 1/4 - в лазарете, да 27 налицо». Сколько людей в команде?

*Решение.*

Наглядно- геометрический способ.

Пусть вся команда – это прямоугольник размером 7×20 клеток (удобнее делить на 7, 5 и 4 равные части) (рис.14 ).

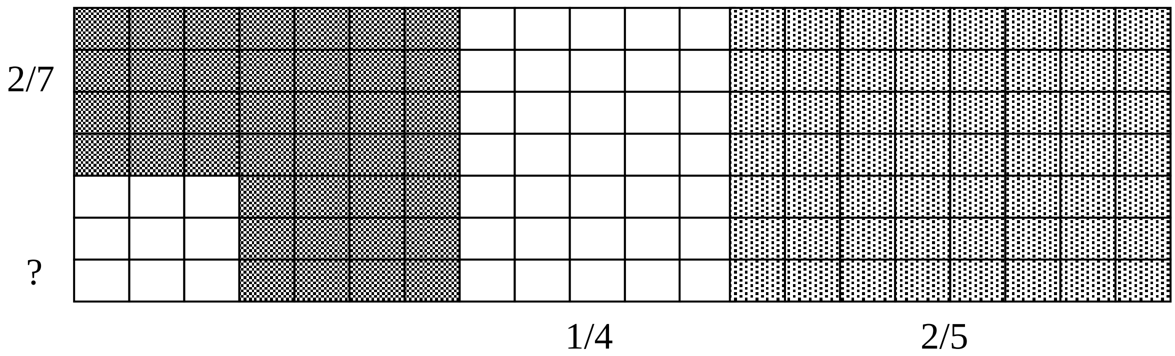



**Рис. 14.**

Тогда 2/5 команды – прямоугольник 7×8 клеток; 1/4 команды – прямоугольник 7×5 клеток: 2/7 команды – прямоугольник 2×20 клеток, его изобразить нельзя, не затрагивая уже отмеченные части, но можно заменить на фигуру, состоящую из 40 клеток.

Остались неотмеченными 9 клеток, а это 27 человек. Значит, 1 клетка – Это 3 человека. Всего в прямоугольнике 140 клеток ($7 \cdot 20 = 140$), тогда в команде 420 человек ($3 \cdot 140 = 420$).

*Ответ*. В команде было 420 человек.

***Задания.*** Решите двумя арифметическими способами следующие задачи:

1) При печатании книги предполагалось уместить на странице 28 строк, по 40 букв в каждой строке. Однако по размерам бумаги оказалось целесообразнее поместить на каждой странице 35 строк. Сколько букв следует помещать в каждой строке, чтобы общее число страниц в книге осталось без изменений?

2) Мотоциклист, двигаясь со скоростью 40 км/ч, проехал некоторое расстояние за 12 мин. За сколько минут проедет это расстояние велосипедист, двигаясь со скоростью 15 км/ч?

2. Решите задачу различными алгебраическими способами: Из 560 листов бумаги сделали 60 тетрадей двух сортов, затратив на тетради одного сорта по

8 листов, а на тетради другого сорта по 12 листов. Сколько сделали тетрадей того и другого сорта отдельно?

*Можно ли решить эту задачу арифметическим способом?*

3.Следующие задачи решите, выполнив сначала чертеж:

1) Один кусок проволоки на 54 м длиннее другого. После того как от каждого из кусков отрезали по 12 м, второй кусок оказался в 4 раза короче первого. Найдите первоначальную длину каждого куска проволоки.

На полке стоят тарелки. Сначала взяли 1/3 часть всех тарелок, а потом 1/2 - оставшихся тарелок. После этого на полке осталось 9 тарелок. Сколько тарелок было на полке?

4. Решите графическим способом:

Два мальчика собрали 96 грибов. 2/3 числа грибов, собранных первым мальчиком, равны 2/5 числа грибов, собранных вторым мальчиком. Сколько грибов собрал каждый мальчик?

*Задача*

Расстояние между двумя городами по железной дороге 720 км. Два поезда одновременно выехали навстречу друг другу и встретились через 10 ч. Скорость одного поезда на 8 км/ч больше скорости второго поезда. Найдите скорость каждого поезда.

Построим вспомогательную модель в виде чертежа

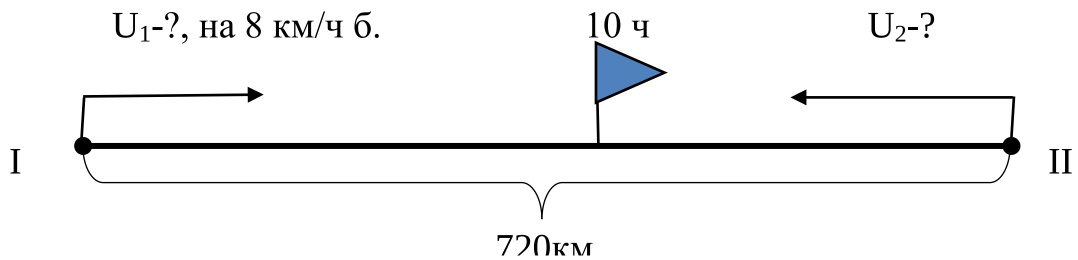



**Рис.15.**

Решим задачу арифметическим методом

***1 способ***

1) 720:10=72 (км/ч) – Uсбл.

т.к. $U_1 > U_2$ на 8 км/ч, то

2) 72-8=64 (км/ч)

3) 6462=32 (км/ч) – $U_2$

4) 32+8=40 (км/ч) – $U_1$

Ответ: 32 км/ч, 40 км/ч

***2 способ***

1) 8*10=80 (км) – больше проедет I поезд до встречи

2) 720-80=640 (км)

3) 640:2=320 (км) – $S_2$

4) 320+80=400 (км) – $S_1$

5) 400:10=40 (км/ч) – $U_1$

6) 40-8=32 (км/ч) – $U_2$

Ответ: 32 км/ч, 40 км/ч

***Алгебраический метод***

***1 способ***

Пусть x км/ч – это скорость II поезда, тогда скорость I поезда будет (x+8) км/ч. Расстояние, пройденное I поездом, равно (x+8)*10, а расстояние, пройденное II поездом x*10. По условию весь путь равен 720 км. Получаем уравнение

(x+8)*10+x*10=720

10x+80+10x=720

20x=640

x=32 (км/ч) – скорость II поезда

32+8=40 (км/ч) – скорость I поезда

Ответ: 32 км/ч, 40 км/ч

***2 способ***

Пусть x км/ч –скорость I поезда.

Тогда(x-8) км/ч – это скорость II поезда.

x+(x-8) =Uсбл.

Составим уравнение:

(x+(x-8))*10=720

(2x-8)*10=720

20x-80=720

20x=800

x=40 (км/ч) - скорость I поезда

40-8=32 (км/ч)- скорость II поезда

Ответ: 32 км/ч, 40 км/ч

*Задача.*

На подготовку уроков Коля потратил 1 ч. 50 мин. Занятия русским языком заняли на 15 мин. больше, чем географией, и на 20 мин. меньше, чем математикой. Сколько времени затратил Коля на подготовку каждого предмета?

Составим вспомогательную модель к задаче в виде чертежа

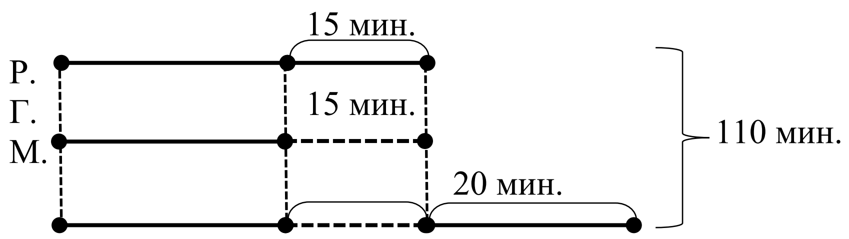



**Рис. 16**

Решим задачу алгебраическим методом

***1 способ***

Пусть x мин. – это время затраченное на подготовку географии, тогда (x+15) мин. – это время, отведенное на русский язык, а ((x+15)+20) мин. – на математику.

По условию задачи, на подготовку всех предметов Коля затратил 110 мин.

Значит:

x+(x+15)+(x+15+20)=110

3x=110+50

3x=60

x=20 (мин.) – на географию

20-15=35 (мин.) – на русский язык

35+20=55 (мин.) – на математику

Ответ: 20 мин., 35 мин., 55 мин.

***2 способ***

Обозначим через х мин. время, отведенное на подготовку русского языка. Тогда (х-15) мин. это время на подготовку географии, (х+20) мин. – на математику.

Составим уравнение:

$x+(x-15)+(x+20)=110$

$3x=105$

$x=35$ (мин) – на русский язык

35-15=20 (мин.) – на географию

35+20=55 (мин.) – на математику

Ответ: 20 мин., 35 мин., 55 мин.

***3 способ***

Обозначим через х мин., время, затраченное на подготовку математики, тогда (х-20) мин. – время, затраченное на подготовку русского языка. Составим уравнение.

$x+(x-20) +(x-35) =110$

$3x = 165$

$x=55$ (мин.) – на математику

55-20=35 (мин.) - на русский язык

35-15=20 (мин.) – на географию.

Ответ: 20 мин., 35 мин., 55 мин.

**Арифметический метод**

***1 способ***

1) 15*2=30 (мин.)

2) 30+20=50 (мин.)

3) 110-50=60 (мин.)

4) 60:3=20 (мин.) – география

5) 20+15 = 35 (мин.) – русский язык

6) 35+20=55 (мин.) – математика

Ответ: 20 мин., 35 мин., 55 мин.

***2 способ***

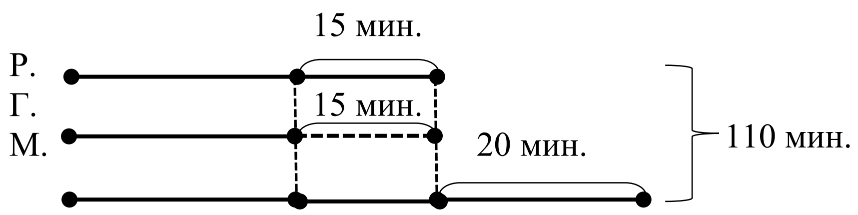



**Рис.17.**

Решение:

1) 110+15=125 (мин.)

2) 125-20=105 (мин.)

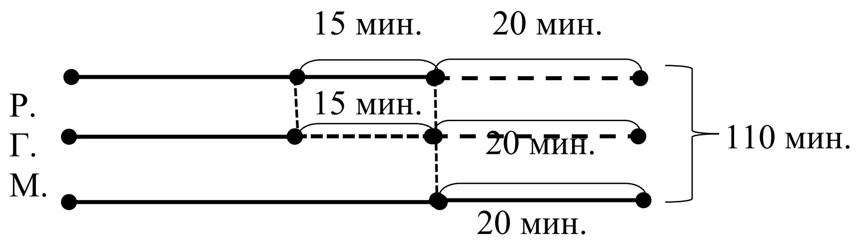
3) 105:3=35 (мин.) – русский язык

4) 35-15=20 (мин.) – география

5) 35+20=55 (мин.) – математика

Ответ: 20 мин., 35 мин., 55 мин.

***3 способ***




1) 20+20=40 (мин.)

2) 40+15 = 55 (мин.)

3) 110+55=165 (мин.)

4) 165:3=55 (мин.) – математика

5) 55-20=35 (мин.) – русский язык

6) 35-15=20 (мин.) – география

Ответ: 20 мин., 35 мин., 55 мин.

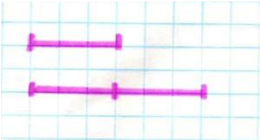
**Задача:**

В двух кусках одинаковое количество ткани. После того, как от одного отрезали 18 м ткани, а от другого отрезали 25 м ткани, в первом куске осталось вдвое больше, чем во втором. Сколько метров ткани в каждом куске?

**Решение:**

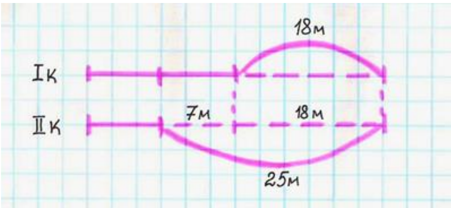
Построим вспомогательную модель к задаче в виде чертежа:

Удобнее построить сначала два отрезка в отношении 2:1



так как после отрезания от каждого куска (18м от I к. ,25 м от II к.) в I к. осталось ткани в 2 раза больше.

По условию задачи в кусках было ткани поровну, поэтому достроим отрезки до одинаковой длины (на чертеже эти части показаны пунктиром) Это те части, которые отрезали. Опустим прямую с конца I к. на II к.




Получим :25 – 18 = 7(м)

7м – это длина II к., тогда длина I к. будет :7 × 2 = 14 (м).

Найдем первоначальную длину каждого куска:

14 + 18 = 32 (м)-длина I к.

7 + 25 = 32 (м) – длина II к.

Длины кусков равны, значит, задача решена правильно.

Решение можно оформить следующим образом:

1) 25 – 18 = 7 (м) - длина I к.

2) 7 × 2 = 14 (м) – длина II к.

Ответ : 7 м, 14 м.

Проверка: 14+18=32(м)

7+25=32(м)

32=32

**II способ решения задачи(алгебраический)**

Целесообразно в процессе составления уравнения использовать таблицу:

| | Было | Изменилось | Стало | отношение |
|---|---|---|---|---|
| Iк. | одинак.(х) | - 18м | (х-18)м | > в 2раза |
| IIк. | одинак.(х) | - 25м | (х-25)м | |

Пусть Х (м) длина каждого куска.

Тогда (х-18)м- остается в Iк., а (х-25)м- во IIк.

По условию х-18 = 2(х-25)

Составим уравнение:

$x-18 = 2(x-25)$

$x-18=2x-50$

$x=32$(м)

32м – первоначальная длина каждого куска ткани. После отрезания в I к. останется:

32 – 18 = 14(м), а во  II к. 32 – 25 = 7(м)

Проверка : 14 : 7 = 2(раза)

**<u>III способ (алгебраический составление системы уравнений)</u>**

Составим систему уравнений:

Пусть  х (м) – Iк., а у (м) – II к.

После отрезания в I к. останется ( х -18) м , а во II к. (у-25) м.

По условию задачи первоначальные длины кусков ткани были одинаковые, т. е. Х=У, а после отрезания длина I к. стала в 2 раза больше II к.

Следовательно : (х - 18)= 2(у-25)

Получаем систему: $\begin{cases} x = y \\ (x - 18) = 2(y - 25) \end{cases}$

Упростив второе уравнение, получим: $x - 2y = -32$

Тогда : $\begin{cases} x = y \\ x - 2y = -32 \end{cases}$

х = 32 (м) – первоначальная длина кусков ткани.

После отрезания : 32 – 18 = 14 (м) – I к.

32 – 25 = 7 (м) – II к.

Задача

Расстояние между двумя городами по железной дороге 720 км. Два поезда одновременно выехали навстречу друг другу и встретились через 10 ч. Скорость одного поезда на 8 км/ч больше скорости второго поезда. Найдите скорость каждого поезда.

Построим вспомогательную модель в виде чертежа

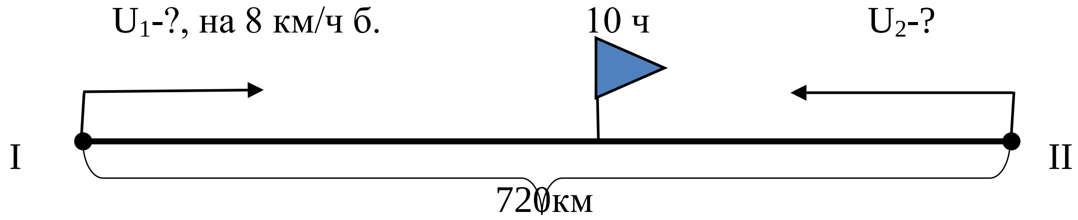



**Рис.18.**

Решим задачу арифметическим методом

***1 способ***

1) 720:10=72 (км/ч) – Uсбл.

т.к. $U_1$>$U_2$ на 8 км/ч, то

2) 72-8=64 (км/ч)

3) 6462=32 (км/ч) – $U_2$

4) 32+8=40 (км/ч) – $U_1$

Ответ: 32 км/ч, 40 км/ч

***2 способ***

1) 8*10=80 (км) – больше проедет I поезд до встречи

2) 720-80=640 (км)

3) 640:2=320 (км) – $S_2$

4) 320+80=400 (км) – $S_1$

5) 400:10=40 (км/ч) – $U_1$

6) 40-8=32 (км/ч) – $U_2$

Ответ: 32 км/ч, 40 км/ч

**Алгебраический метод**

***1 способ***

Пусть х км/ч – это скорость II поезда, тогда скорость I поезда будет (x+8) км/ч. Расстояние, пройденное I поездом, равно (x+8)*10, а расстояние, пройденное II поездом x*10. По условию весь путь равен 720 км. Получаем уравнение

(x+8)*10+x*10=720

10x+80+10x=720

20x=640

x=32 (км/ч) – скорость II поезда

32+8=40 (км/ч) – скорость I поезда

Ответ: 32 км/ч, 40 км/ч

***2 способ***

Пусть x км/ч –скорость I поезда.

Тогда(x-8) км/ч – это скорость II поезда.

x+(x-8) =U сбл.

Составим уравнение:

(x+(x-8))*10=720

(2x-8)*10=720

20x-80=720

20x=800

x=40 (км/ч) - скорость I поезда

40-8=32 (км/ч)- скорость II поезда

Ответ: 32 км/ч, 40 км/ч

При решении задачи: «В школьной столовой было 10 столов. Поставили еще 6 новых столов, а один старый вынесли. Сколько столов стало в столовой?» можно рассмотреть следующие способы:

**1-й способ**

1) 10+6=16 (ст.)

2) 16-1=15 (ст.)

Ответ: в столовой стало 15 столов.

**2-й способ**

1) 10-1=9 (ст.)

2) 9+6=15 (ст.)

Ответ: в столовой стало 15 столов.

**3-й способ**

1) 6-1=5 (ст.)

2) 10+5=15 (ст.)

Ответ: в столовой стало 15 столов.

В учебниках «Математика1» и «Математика2» задач, допускающих различные способы решений, не так уж и много, и надо не упустить возможности их использовать.

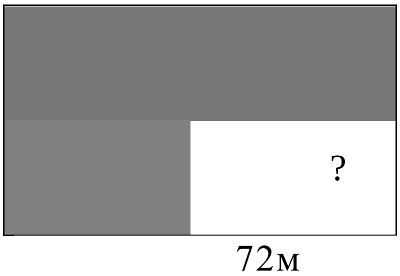
Большие возможности открываются во III и IV классах, так как круг составных задач и их содержание значительно расширяются. К отдельным задачам в учебниках имеются указания «Реши задачу разными способами».

Однако в учебниках имеется немало задач, не содержащих таких требований, но допускающих разные способы решений. Учителю надо быть всегда готовым организовывать творческое обсуждение таких задач. Рассмотрим задачу.

Задача (4 класс).

Длина огорода прямоугольной формы 72 м, ширина в 2 раза меньше. Овощами занято 3/4 площади огорода, остальная часть картофелем. Сколько квадратных метров огорода занято картофелем?

Вспомогательная модель может быть построена в виде чертежа. В ходе построения чертежа необходимо вспомнить свойства прямоугольника и способы деления его на 4 равные части (рис. 19).




72:2(м)

72м

Рис. 19-а

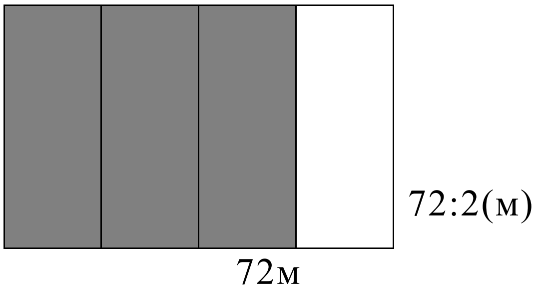



Рис. 19-б

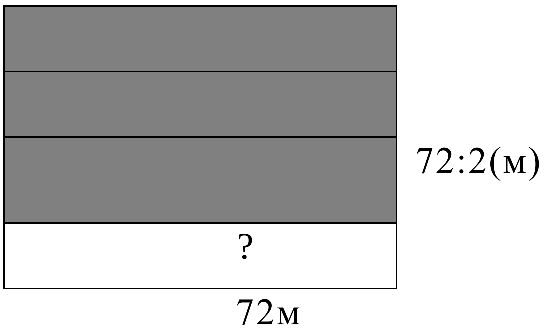



Рис. 19-в

Анализ задачи проводят в ходе построения чертежа.

Рассмотрим первый способ решения данной задачи.

*Возможные вопросы*:

У. Какой формы огород? (Прямоугольной).

У. Чему равна длина огорода? (72м).

У. Мы знаем, чему равна ширина? (Не знаем).

У. Что нам известно о ширине? (Она в 2 раза меньше, чем длина).

У. Какая часть площади занята овощами? (3/4).

У. Что нужно узнать в задаче? (Сколько квадратных метров огорода занято картофелем).

У. Какие числа надо знать, чтобы ответить на вопрос задачи? (Площадь всего огорода и площадь, занятую овощами).

У. Какие числа надо знать, чтобы узнать площадь огорода?

(Длину огорода и ширину).

У. Какое из этих чисел нам известно? (72)

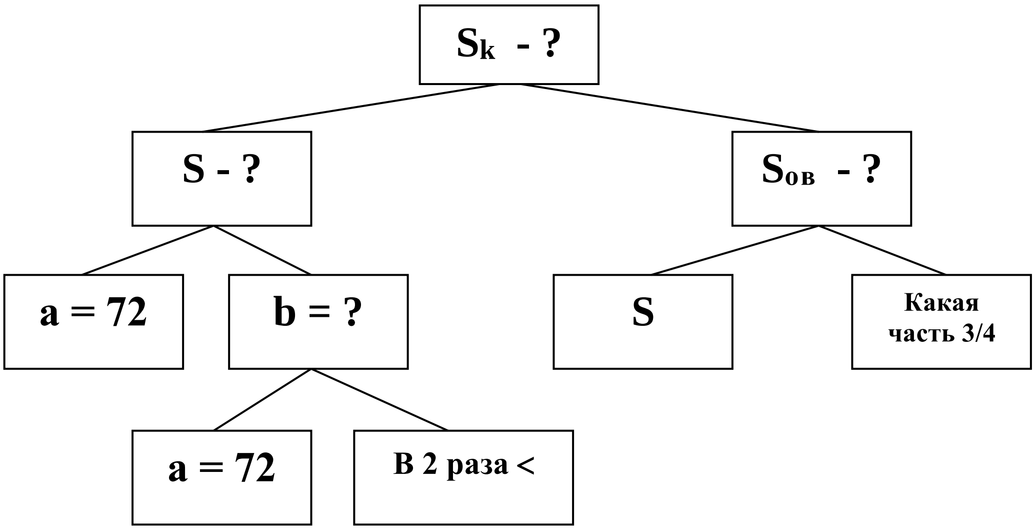



**Рис.20.**

У. Какое число нам неизвестно? (Ширина огорода).

У. Какие числа надо знать, чтобы вычислить ширину?

У. Какие числа надо знать, чтобы вычислить площадь занятую овощами? (Площадь всего огорода, и ее часть, занятая овощами).

Решение.

1) 72:2=36 (м) — ширина огорода

2) 72-36=2592 ($м^2$) - площадь огорода

3) 2592:4•3=1944 ($м^2$) — занято овощами

4) 2592-1944=648 ($м^2$)

Ответ: 648 $м^2$ огорода занято картофелем.

*Рассуждения можно проводить и так:*

У. Какой формы участок, площадь которого надо найти? (Прямоугольной).

У. Чему равна площадь прямоугольника? (Длину участка надо умножить на ширину).

У. Какую часть от длины огорода составляет длина участка? (1/2)

У. Как можно узнать длину участка?

72:2=36 (м)

У. Какую часть ширины огорода составляет ширина участка? (1/2)

У. Как можно узнать ширину участка? (Надо найти ширину огорода и разделить на 2).

**II способ. (**Решение, см. рис. 5а).

1) 72:2=36 (м) — ширина огорода

2) 72:2=36 (м) - длина участка

3) 36*18=648 ($м^2$) — ширина участка

Ответ: 648 $м^2$ огорода занято картофелем.

**III способ. (**Решение, см. рис. 5б).

1) 72:2=36 (м) — ширина огорода или участка

2) 72:4=18 (м) — длина участка

3) 36 * 18=648 ($м^2$)

Ответ: 648 $м^2$ огорода занято картофелем.

**IV способ. (**Решение, см. рис. 5в).

1) 72:2=36 (м) — ширина огорода

2) 36:4=9 (м) – ширина участка

3) 72*9 = 648($м^2$)

4) Ответ: 648 $м^2$ огорода занято картофелем.

**V способ.**

1) 72:2=36 (м) — ширина огорода

2) 72*36=2592 ($м^2$) - площадь огорода

3) 2592:4=648 ($м^2$) — площадь участка

Ответ: 648 $м^2$ огорода занято картофелем.

Как правило, в качестве вспомогательной модели учитель строит один чертеж задачи, и по нему проводит поиск решения. При решении данной задачи важно построить и проанализировать все три чертежа, так как каждый из них дает возможность решить задачу другим способом.

После решения исходной задачи целесообразно ответить на дополнительные вопросы:

– Сколько килограммов картофеля собрали?

– Сколько килограммов свеклы собрали, если ею занята 1/6 часть площади огорода?

– Сколько килограммов капусты собрали, если ею занята 1/9 часть площади огорода?

– Сколько килограммов моркови собрали, если ею занята 1/12 часть площади огорода?

Чтобы ответить на них, нужны дополнительные данные, которые учащиеся могут взять из таблицы:

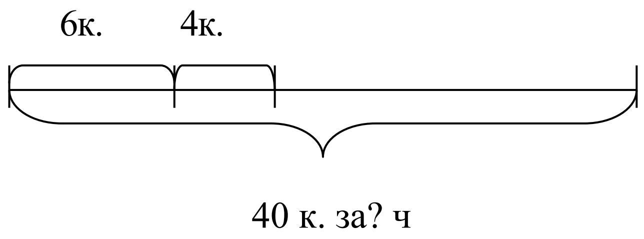
| Культура | Урожай с 1 $м^2$, кг |
|---|---|
| Картофель | 4 |
| Капуста | 5 |
| Морковь | 4 |
| Свекла | 3 |
| Репа | 2 |
| Лук | 3 |
| Чеснок | 3 |
| Тыква | 3 |
| Огурцы | 3 |

Дополнительные данные вводятся после разбора и решения исходной задачи. Учащимся предлагается ответить на вопросы, записанные на карточках. Метод введения в условие задачи дополнительных данных способствует расширению кругозора учащихся, формирует умение использовать различные справочники и позволяет реализовывать дифференцированный подход в процессе обучения.

**ЗАДАЧА.** Два брата окапывали кусты малины. Первый брат за 1 час окопал

6 кустов, а второй — 4 куста. Сколько времени они должны работать вместе, чтобы окопать 40 кустов?

Вспомогательные модели могут быть различными: схематический чертеж или таблица.




| | За 1 час | Время работы | Всего окопали |
|---|---|---|---|
| I | 6к. | ? | 40к. |
| II | 4к. | | 40к. |

Если разбор ведется от числовых данных, то он сопровождается беседой:

**У.:** Если первый брат окапывал в час 6 кустов, а второй – 4 куста, то что можно узнать?

**Д.:** Сколько кустов за 1 час окапывают оба брата.

**У.:** Зная это и то, что им надо окопать 40 кустов, что можно ещё узнать?

**Д.:** Сколько времени они должны работать вместе.

Чтобы сформировать у учащихся понятие анализа составных задач и выработать умение вести рассуждение, необходимо решать значительное количество задач разной структуры. Когда дети овладели полным анализом задачи от вопроса и от числовых данных, возникают условия для дальнейшего развития абстрактного мышления учащихся и повышения эффективности работы над задачей, с использованием неполного анализа при разборе задач.

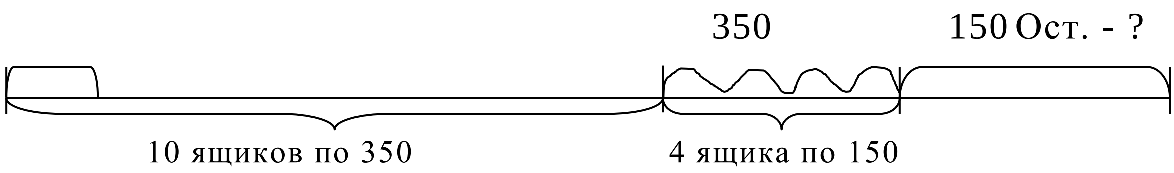
Полный анализ задачи, решаемой в 4-5 действий, является многословным и отнимает много времени.

**Задача. 4 класс.**

Птицефабрика должна отправить в магазины 6000 яиц. Она уже отправила 10 ящиков по 350 яиц и 4 ящика по 150 яиц. Сколько яиц осталось отправить в магазины?

Вспомогательные модели можно построить в виде схематического чертежа и краткой записи.

1. Схематический чертеж




2. Краткая запись с использованием числовых выражений:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Отправили - } 350 \bullet 10 \text{ (яиц)}\\ 150 \bullet 4 \text{ (яиц)}\\ \text{Осталось - } ?\end{array}\right\} 6000 \text{ (яиц)}$$

Выполняя неполный анализ, дети рассуждают примерно так: «Чтобы ответить на вопрос задачи, надо знать сколько всего яиц надо отправить (6000 яиц), и сколько яиц птицефабрика уже отправила Чтобы узнать, сколько всего яиц фабрика отправила, надо знать, сколько она отправила в первый и во второй раз. В первом вопросе узнаем, сколько яиц птицефабрика отправила в 10-ти ящиках, во втором – сколько она отправила яиц в 4-х ящиках, в третьем – сколько яиц всего отправили, а в четвертом – сколько яиц осталось отправить». Схемы полного и неполного анализа наглядно показывают преимущество и недостатки каждого из них (рис.10).

Учащиеся, умеющие составлять план решения задачи, самостоятельно записывают решение по указанию учителя: или в форме математического выражения, или по отдельным действиям. Для детей, которые затрудняются составить план решения, делается более подробный анализ.

При решении многих задач дети допускают ошибки из-за того, что не умеют представить жизненную ситуацию, описанную в ней, не умеют осознать отношения между величинами. Поэтому сокращенную запись условия задачи целесообразнее моделировать с помощью графической схемы.

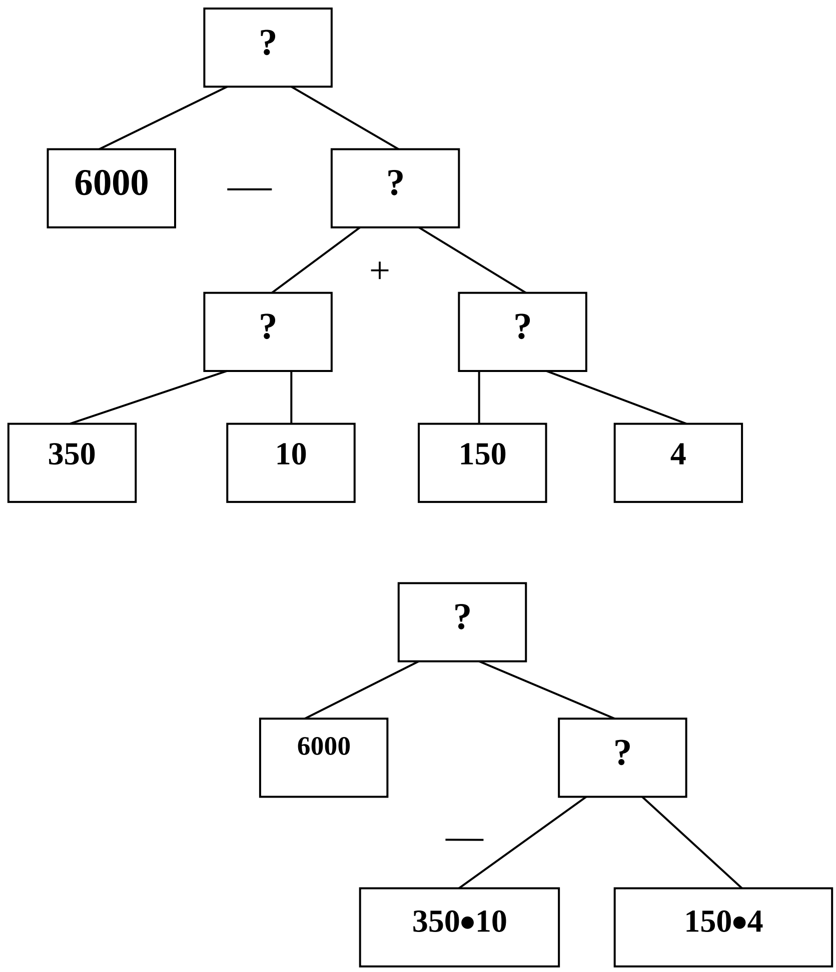



**Рис. 21.**

Например: «На двух участках получен одинаковый урожай свеклы. С одного участка увезли 320 ц, и с него осталось еще увезти 976 ц. С другого участка увезли в 3 раза больше, чем с первого. Сколько свеклы осталось увезти со второго участка?»

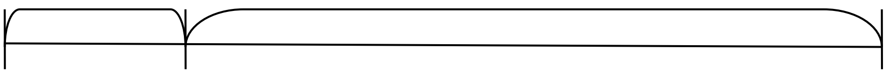
Составляя вспомогательную модель задачи, ведем беседу:

**У.:** Массу свеклы, выращенной на каждом участке, обозначим двумя равными отрезками. А почему равными?

**Д.:** Урожай был одинаковый.

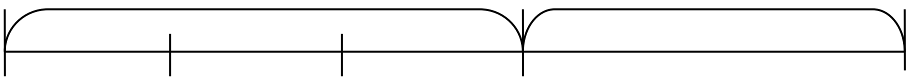
**I участок**

320 ц 976 ц



Увезли Осталось

**II участок**



**У.:** Сколько центнеров свеклы увезли с 1-го участка?

**Д.:** 320 ц.

**У.:** Сколько осталось увезти?

**Д.:** 976 ц.

**У.:** Во сколько раз больше увезли со II-го участка?

**Д.:** В 3 раза.

**У.:** Откладываем на втором отрезке 3 раза по 320 ц. Оставшуюся часть надо найти. Решение задачи можно выполнить следующими способами:

<u>I способ:</u>

320•3 = 960 (ц) — увезли со II участка;

320+976 = 1296 (ц) - было;

1296-960 = 336 (ц) — осталось увезти со II участка.

<u>II способ:</u>

320•2 = 640 (ц)

976-64 = 336 (ц)

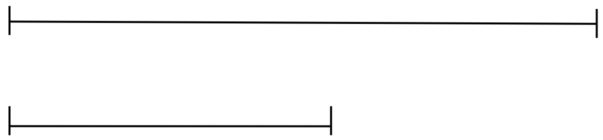
Ответ: осталось увезти 336 ц со II участка.

Следует отметить, что решение задачи разными способами не только позволяет убедиться в правильности решения задачи, но дает возможность глубже раскрыть зависимость между величинами. Необходимость решать задачи разными способами сопровождает ученика в течение всей его учебы в школе. Кроме того, выработка привычки к поиску другого варианта решения играет большую роль в будущей работе, научной и творческой деятельности. К сожалению, учителя не часто применяют такой вид работы: он отнимает много времени. Хотя детям он нравится. Некоторые успевают решить задачу разными способами за то время, пока учитель решает задачу до конца. Рассмотрим задачу:

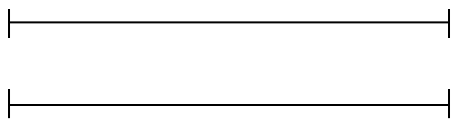
**Задача.** В двух корзинах 75 яблок. Когда из первой взяли 6, а из второй — 9, то в корзинах осталось яблок поровну. Сколько яблок было в каждой корзине?

Выполняя схематический рисунок к задаче, большинство учащихся изобразят два отрезка, один из которых будет изображать яблоки в первой корзине, а другой - во второй. Но так как из текста задачи не ясно, в какой корзине яблок было больше, то и рисунки могут быть разными:

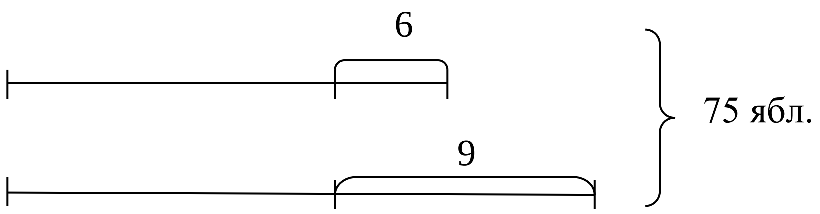
а)



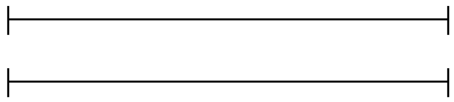
б)



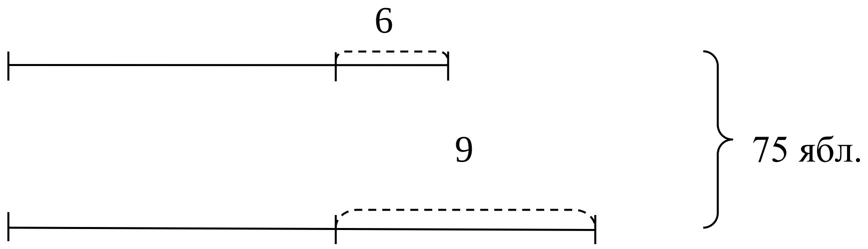
Теперь нужно «взять» 6 яблок из первой корзины и 9 яблок из второй корзины, тогда яблок в корзинах останется поровну. Вряд ли это условие можно выполнить, если воспользоваться первым схематическим рисунком. Зато, пользуясь вторым рисунком, это можно сделать.



Но процесс выполнения схематического рисунка может быть и другим. Для этого нужно только представить, что из первой корзины уже взяли 6, а из второй — 9 яблок и в корзинах яблок поровну.



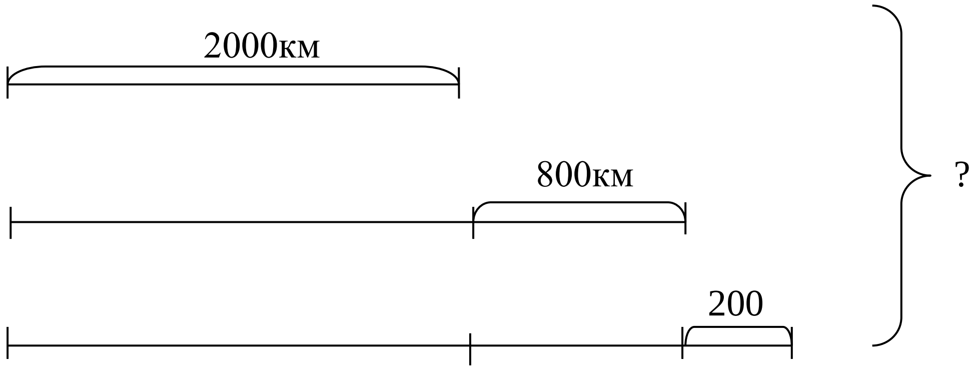
Теперь можно из данного схематического рисунка восстановить первоначальную ситуацию:




Соответственно записать различные способы решения задачи:

| | |
|---|---|
| 6+9=15 (ябл.) | 75-6=69 (ябл.) |
| 75-15=60 (ябл.) | 69-9=60 (ябл.) |
| 60:2=30 (ябл.) | 60:2=30 (ябл.) |
| 30+6=36 (ябл.) | 30+6=36 (ябл.) |
| 30+9=39 (ябл.) | 30+9=39 (ябл.) |

**Задача.** Летчик пролетел в первый день 2000 км, во второй день на 800 км больше, чем в первый, а в третий день на 200 км больше, чем во второй. Сколько километров налетал летчик за три дня?



Используя схему, дети рассуждают:

«По 2000 км летчик пролетал 3 раза, 800 км - два раза и 200 км - один раз. Следовательно,задачу можно решить так:

I способ

1) 2000•3 = 6000 (км)
2) 800•2 = 1600 (км)
3) 6000+1600 +200 = 7800 (км)

Ответ: 7800 км.

Следующее возможное рассуждение. Во второй день летчик пролетел 2800 км, так как 2000+800=2800 (км). Это расстояние он пролетал 2 раза, а еще 2000 км и 200 км. Отсюда решение:

II способ

1) 2000+800 = 2800 (км)
2) 2800-2 = 5600 (км)
3) 5600+2000 +200 = 7800 (км)

Ответ: 780 км.

Возможны и другие способы решения, например:

III способ

1) 2000+800 = 2800 (км)
2) 2800+200 = 3000 (км)
3) 2000+2800+3000 = 7800 (км)

Ответ: 780 км налетал летчик за 3 дня.

IV способ

1) 3000•3 = 9000 (км)
2) 9000-800-400 = 7800 (км)

Ответ: 7800 км налетал летчик за 3 дня.

Навык самостоятельности лучше формировать через дифференцированные задания, с учетом индивидуальных особенностей учащихся.

Карточки с дифференцированными заданиями целесообразно использовать в следующих случаях:

- ✓ при изучении, когда встречаются сложные понятия;
- ✓ при обобщении пройденной темы и подготовке к итоговой работе;
- ✓ при работе над ошибками в контрольных и самостоятельных работах.

При этом ставятся цели:

- ✓ закрепление знаний, умений и навыков;
- ✓ развитие логического (творческого) мышления;
- ✓ формирование навыков самостоятельной работы, самоконтроля;
- ✓ развитие интереса к предмету.

Например, задача: «Для детского дома фермерское хозяйство отправило 5 ящиков с грушами, по 9 кг в каждом, и 7 таких же ящиков с яблоками. Сколько всего килограммов фруктов они отправили?»

Предлагаются учащимся карточки-задания в трех вариантах:

1-й вариант — средней трудности

Составь и реши задачу по схеме-опоре:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Груш - 5 ящ. по 9кг;}\\ \text{Яблок - 7 ящ. по 9кг}\end{array}\right\} ?$$

Можно ли решить задачу другим способом?

**Задача**

<u>2-й вариант - повышенной трудности</u>

Дай характеристику задаче. Реши задачу разными способами, если возможно.

Реши задачу дополнительно (указать номер задачи или привести текст).

<u>3-й вариант - облегченный</u>

Груш - 45 кг;

Яблок - ? на 12 кг больше.

Составь обратную задачу.

В процессе работы ученики постоянно повышают уровень своих знаний. Выполнение более сложного задания становится целью каждого из них. Такая работа имеет и важное воспитательное значение: приучает к тщательному выполнению любого задания, поддерживает на должном уровне активность, формирует чувство самостоятельности и ответственности.

## 5. Методика решения логических задач.

Особое место в математике занимают задачи, решение которых развивает логическое мышление, что способствует успешному изучению предмета. Эти задачи носят занимательный характер и не требуют большого запаса математических знаний, поэтому они привлекают даже тех учащихся, которые не очень любят математику. Такие задачи целесообразно начинать решать с третьего класса, либо на уроках, либо на внеклассных занятиях.

Решение многих логических задач связано с рассмотрением нескольких конечных множеств с одинаковым числом элементов, между которыми требуется установить соответствие. При решении таких задач удобно использовать различные таблицы и графики.

**Задача 1.** Три друга — Алеша, Боря и Витя — учатся в одном классе. Один из них ездит домой из школы на автобусе, один — на трамвае, один — на троллейбусе. Однажды после уроков Алеша пошел проводить своего друга до остановки автобуса. Когда мимо них проходил троллейбус, третий друг крикнул из окна: «Боря, ты забыл в школе тетрадку!». Кто на чем ездит домой?

*Решение.* При решении задачи удобно пользоваться таблицей:

| | Автобус | Троллейбус | Трамвай |
|---|---|---|---|
| Алеша | | | |
| Боря | | | |
| Витя | | | |

Договоримся отмечать в таблице результат, полученный в ходе логических рассуждений, знаком « + » положительный, а знаком «-» отрицательный. Видим, что в задаче речь идет о двух множествах: множестве имен и множестве видов транспорта, на котором ребята едут домой. Обращаем внимание на то, что между этими множествами установлено взаимно однозначное соответствие, то есть каждому элементу первого множества соответствует единственный элемент второго множества, а двум различным элементам первого множества соответствуют два различных элемента второго множества. Какая картина будет наблюдаться при заполнении таблицы в данном случае?

В каждом столбце — только один знак «+», в каждой строке — только один знак «+». Поэтому, если в какой-то из клеток появляется знак «+», то все остальные клетки в данной строке и в данном столбце заполняем знаками «-».

*Выделяем ключевые условия.*

(1)Алеша провожает друга до остановки автобуса.

(2)Крик из троллейбуса: «Боря, ты забыл тетрадку».

Анализируя каждое из условий, заполняем таблицу. Из условия (1) делаем вывод о том, что Алеша не ездит на автобусе — ставим знак «-» в ячейку <автобус — Алеша>. Из условия (2) делаем вывод о том, что в троллейбусе едет не Боря — ставим знак «-» в ячейку <троллейбус — Боря>. Таблица принимает вид:

| | Автобус | Троллейбус | Трамвай |
|---|---|---|---|
| Алеша | -(1) | | |
| Боря | | -(2) | |
| Витя | | | |

Из (1) и (2) — в троллейбусе едет не Алеша (он провожает друга до остановки автобуса). Ставим знак «-» в ячейку <троллейбус — Алеша>.

| | Автобус | Троллейбус | Трамвай |
|---|---|---|---|
| Алеша | -(1) | - | |
| Боря | | -(2) | |
| Витя | | | |

В каждой строке или столбце обязательно есть знак « + ». Из таблицы видим, что в первой строке два знака «-», значит, в ячейке <трамвай — Алеша> ставим знак « + ».

| | Автобус | Троллейбус | Трамвай |
|---|---|---|---|
| Алеша | **-(1)** | - | + |
| Боря | | -(2) | |
| Витя | | | |

В столбике <трамвай> может быть только один знак « + » (соответствие однозначное), поэтому ячейки <трамвай — Боря> и <трамвай — Витя> заполняем знаками «-»:

| | Автобус | Троллейбус | Трамвай |
|---|---|---|---|
| Алеша | -(1) | - | + |
| Боря | | -(2) | - |
| Витя | | | - |

В столбике <троллейбус> два знака «-» уже есть, значит, последнюю ячейку заполняем знаком «+». В строке <Боря> — аналогично. Теперь таблица принимает вид:

| | Автобус | Троллейбус | Трамвай |
|---|---|---|---|
| Алеша | -(1) | - | + |
| Боря | + | -(2) | - |
| Витя | | + | - |

В столбце <автобус> есть знак « + », поэтому ячейку <автобус — Витя> заполняем знаком «-».

| | Автобус | Троллейбус | Трамвай |
|---|---|---|---|
| Алеша | -(1) | - | + |
| Боря | + | -(2) | - |
| Витя | - | + | - |

*Ответ:* Алеша поедет на трамвае, Боря - на автобусе, Витя - на троллейбусе.

**Задача 2.** Каникулы в школе птиц и зверей началась большим карнавалом. Медведь, волк, лиса и заяц явились в маскарадных костюмах волка, медведя, лисы и зайца. На балу зверь в маскарадном костюме зайца выиграл в лотерее банку меда и остался этим очень недоволен. Известно также, что медведь не любит лису и никогда не берет в лапы картинок, где она нарисована. Зверь в маскарадном костюме лисы выиграл в лотерее пучок моркови, но это тоже не доставило ему никакой радости. Не могли бы вы сказать, какой маскарадный костюм смастерил себе каждый из зверей?

*Решение.* По смыслу задачи все звери переоделись, поэтому сразу заполняем клетки, расположенные по диагонали знаками «-».

| | Костюмы | | | |
|---|---|---|---|---|
| | медведя | лисы | волка | зайца |
| Медведь | - | -(2) | + | -(1) |
| Лиса | | - | | |
| Волк | | | - | |
| Заяц | | | | - |

*Выделяем ключевые условия.*

(1)Зверь в костюме зайца выиграл банку меда и был этим недоволен.

(2)Медведь не берет в руки картинки с изображением лисы.

(3)Зверь в костюме лисы выиграл пучок моркови и был этим недоволен.

Из условия (1) следует, что в костюме зайца был не медведь (медведи любят мед). Ставим знак «-» в ячейку <костюм зайца — медведь>. Из условия (2) следует, что медведь не надел бы костюма лисы. Ставим знак «-» в ячейку <костюм лисы — медведь>.

| | Костюмы | | | |
|---|---|---|---|---|
| | медведя | лисы | волка | зайца |
| Медведь | - | -(2) | + | -(1) |
| Лиса | | - | | |
| Волк | | | - | |
| Заяц | | | | - |

В первой строке все клетки, кроме одной, заполнены знаком «->>. Соответствие взаимно однозначное. Поэтому последнюю клетку заполняем знаком « + ». Все клетки, которые находятся ниже знака «+», заполняем знаками «-».

| | Костюмы | | | |
|---|---|---|---|---|
| | медведя | лисы | волка | зайца |
| Медведь | - | -(2) | + | -(1) |
| Лиса | | - | - | |
| Волк | | | - | |
| Заяц | | - | - | - |

Из условия (3) — зверь в костюме лисы не любит морковь, значит, это не заяц. Ставим знак «-» в ячейку <костюм лисы — заяц>.

В столбце <костюм лисы все клетки заполнены знаками «-», значит, последнюю клетку заполняем знаком «+», а пустые клетки в строке <Волк> знаками «-».

| | Костюмы | | | |
|---|---|---|---|---|
| | медведя | лисы | волка | зайца |
| Медведь | - | -(2) | + | -(1) |
| Лиса | | - | - | |
| Волк | - | + | - | - |
| Заяц | | - | - | - |

В строке <Заяц> все клетки кроме одной заполнены знаками «-», значит, последнюю заполняем знаком «+». В столбце <костюм медведя> может быть только один знак «+», поэтому оставшуюся пустую ячейку здесь заполняем знаком «-».

| | Костюмы | | | |
|---|---|---|---|---|
| | медведя | лисы | волка | зайца |
| Медведь | - | -(2) | + | -(1) |
| Лиса | - | - | - | |
| Волк | - | + | - | - |
| Заяц | + | - | - | - |

В строке <Лиса> все клетки кроме одной заполнены знаками «-». В последней ставим знак « + ».

| | Костюмы | | | |
|---|---|---|---|---|
| | медведя | лисы | волка | зайца |
| Медведь | - | -(2) | + | -(1) |
| Лиса | - | - | - | + |
| Волк | - | + | - | - |
| Заяц | + | - | - | - |

Все знаки расставлены. Можем сделать *вывод:* медведь — в костюме волка, лиса — в костюме зайца, волк — в костюме лисы, заяц — в костюме медведя.

**Задача 3.** В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что:

(1) вода и молоко не в бутылке;

(2) сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом;

(3) в банке не лимонад и не вода;

(4) стакан стоит между банкой и сосудом с молоком.

В каком сосуде находится каждая из жидкостей?

*Решение.* Из условия (1) ясно, что вода и молоко не в бутылке, значит, ставим знак «-» в соответствующие ячейки. Из условия (2) — сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, значит, в кувшине не лимонад и не квас. Из условия (3) — лимонад и вода не в банке. Из условия (4) — в стакане и банке не молоко. В результате таблица принимает вид:

| | Лимонад | Вода | Молоко | Квас |
|---|---|---|---|---|
| Бутылка | | -(1) | -(1) | |
| Стакан | | | -(4) | |
| Кувшин | -(2) | | | -(2) |
| Банка | -(3) | -(3) | -(4) | |

Замечаем, что в столбце <молоко> все клетки кроме одной заполнены знаками «-», поэтому последнюю клетку заполняем знаком «+» (помним, что в каждой строке и в каждом столбце должен быть только один знак «+», так как соответствие однозначное). Аналогично, в строке <банка>.

| | Лимонад | Вода | Молоко | Квас |
|---|---|---|---|---|
| Бутылка | | -(1) | -(1) | |
| Стакан | | | -(4) | |
| Кувшин | -(2) | - | + | -(2) |
| Банка | -(3) | -(3) | - (4) | + |

Теперь легко заполнить пустую клетку в строке <бутылка> и клетку под ней. Осталась одна пустая клетка в строке <стакан>. Очевидно, что в нее нужно поставить знак «+».

| | Лимонад | Вода | Молоко | Квас |
|---|---|---|---|---|
| Бутылка | + | -(1) | -(1) | - |
| Стакан | - | + | -(4) | - |
| Кувшин | -(2) | - | + | -(2) |
| Банка | -(3) | -(3) | -(4) | + |

Итак, лимонад — в бутылке, вода — в стакане, молоко — в кувшине, квас — в банке.

**Задача 4.** В небольшом районном городе живут пять друзей: Иванов, Петренко, Сидорчук, Гришин и Капустин. Профессии у них разные: один из них маляр, другой — мельник, третий — плотник, четвертый — почтальон, а пятый — парикмахер. Петренко и Гришин никогда не держали в руках малярной кисти. Иванов и Гришин собираются посетить мельницу, на которой работает их товарищ. Петренко и Капустин живут в одном доме с почтальоном. Сидорчук был недавно в ЗАГСе одним из свидетелей, когда Петренко и дочь парикмахера сочетались законным браком. Иванов и Петренко каждое воскресенье играют в городки с плотником и маляром. Гришин и Капустин по субботам обязательно встречаются в парикмахерской, где работает их друг. Почтальон предпочитает бриться сам. Кто есть кто?

*Решение. Выделим ключевые условия.*

(1) Петренко и Гришин никогда не держали в руках малярной кисти.

(2) Иванов и Гришин собираются посетить мельницу, на которой работает их товарищ.

(3) Петренко и Капустин живут в одном доме с почтальоном.

(4) Сидорчук был недавно в ЗАГСе одним из свидетелей, когда

Петренко и дочь парикмахера сочетались законным браком.

(5) Иванов и Петренко каждое воскресенье играют в городки с плотником и маляром.

(6) Гришин и Капустин по субботам обязательно встречаются в парикмахерской, где работает их друг.

(7) Почтальон предпочитает бриться сам.

Из условия (1): Петренко и Гришин — не маляры. Из .условия (2): Иванов и Гришин — не мельники. Из условия (3): Петренко и Капустин — не почтальоны. Из условия (4): Петренко и Сидорчук — не парикмахеры. Из условия (5): Иванов и Петренко — не плотники и не маляры. Из условия (6): Гришин и Капустин — не парикмахеры. Из условий (7) и (6): Гришин и Капустин — не парикмахеры. Выясняем, что в задаче речь идет о взаимно однозначном соответствии. Теперь заполняем таблицу.

| Фамилии | Профессии | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | маляр | плотник | мельник | почтальон | парикмахер |
| Иванов | -(5) | -(5) | -(2) | | |
| Петренко | -(1) | -(5) | | -(3) | -(4) |
| Сидорчук | | | | | -(4) |
| Гришин | -(1) | | -(2) | | -(6) |
| Капустин | | | | -(3) | -(6) |

Делаем *вывод:* Иванов — парикмахер, Петренко — мельник, Сидорчук — почтальон, Гришин — плотник, Капустин — маляр.

**Задача 5.** Беседуют трое друзей: Белокуров, Рыжов и Чернов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из Had блондин, другой — брюнет, третий — рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос у каждого из друзей?

*Решение. Выделим ключевые условия:*

(1) брюнет сказал Белокурову... (значит, Белокуров не брюнет);

(2) цвет волос не соответствует фамилии. Соответствие взаимно однозначное.

| Фамилии | Цвет волос | | |
|---|---|---|---|
| | рыжий | черный | русый |
| Белокуров | | -(1) | -(2) |
| Чернов | | -(2) | |
| Рыжов | -(2) | | |

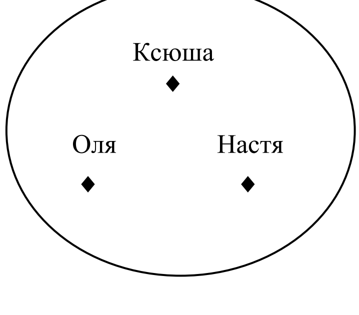
Рассуждения аналогичны рассуждениям в задачах 1-4.

**Графический способ решения логических задач**

Если в задаче фигурирует не два, а больше множеств, то ее решение с помощью таблицы может заметно усложниться, в этом случае приходится пользоваться несколькими таблицами. Рассмотрим графический способ решения задач. Договоримся элементы множеств изображать точками плоскости. Если по условию задачи между двумя элементами этих множеств есть соответствие, то будем соединять такие элементы сплошной линией. Если же между двумя элементами множеств соответствия нет, то будет соединять их пунктирной линией. При наличии взаимно однозначного соответствия каждый элемент одного из множеств будет соединяться сплошной линией только с одним элементом другого множества, а с остальными элементами он будет соединяться пунктирными линиями.

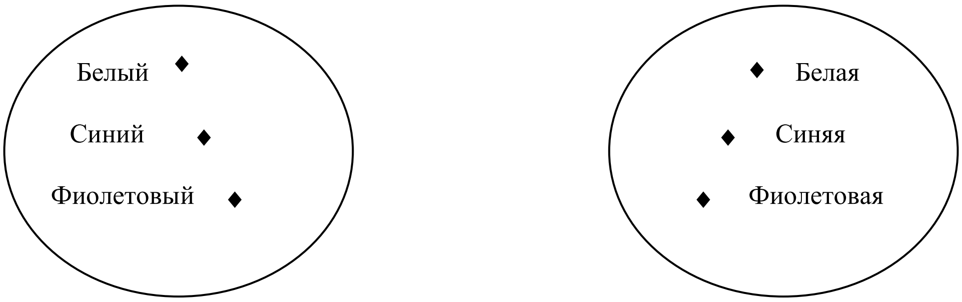
**Задача 1.** У трех подружек — Ксюши, Насти и Оли — новогодние карнавальные костюмы белого, синего и фиолетового цветов, и шапочки тех же цветов. У Насти цвет костюма и шапочки совпали, у Ксюши ни костюм, ни шапочка не были фиолетового цвета, а Оля была в белой шапочке, но цвет костюма у нее не был белым. Как были одеты девочки?

Множество подружек




Множество костюмов

Множество шапочек




*Решение.* Будет изображать множество подружек, шапочек и костюмов кругами, а элементы множеств — точками, помещенными в эти круги.

*Ключевые условия.*

(1) Костюм и шапочка Насти одного цвета.

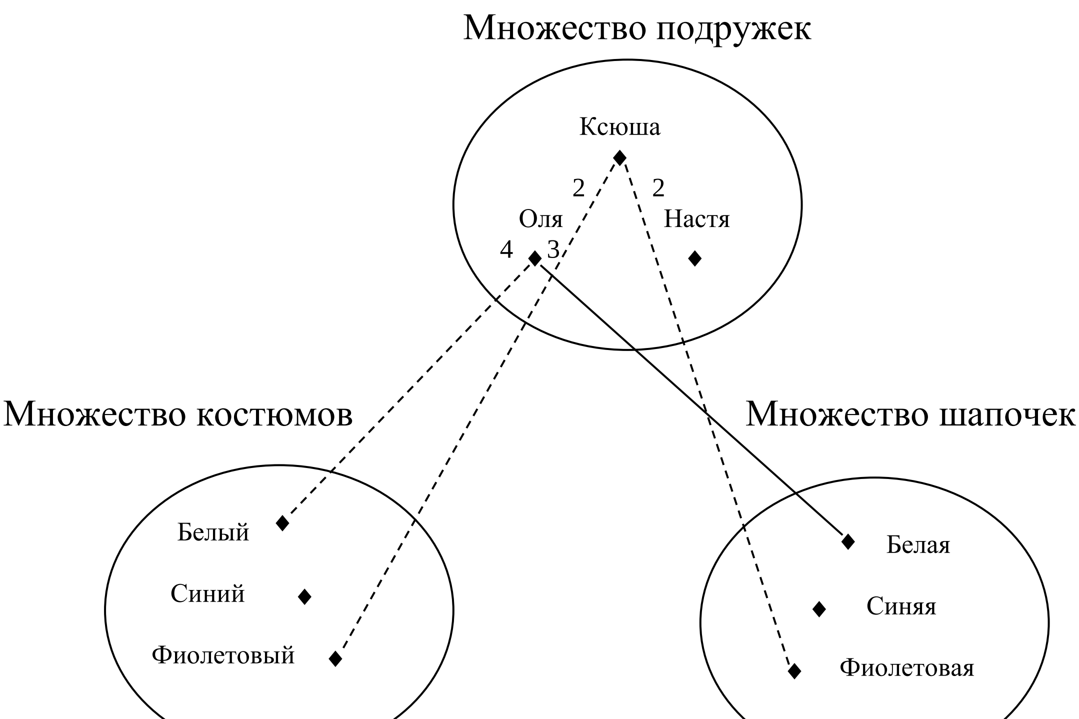
(2) Костюм и шапочка Ксюши не фиолетового цвета.

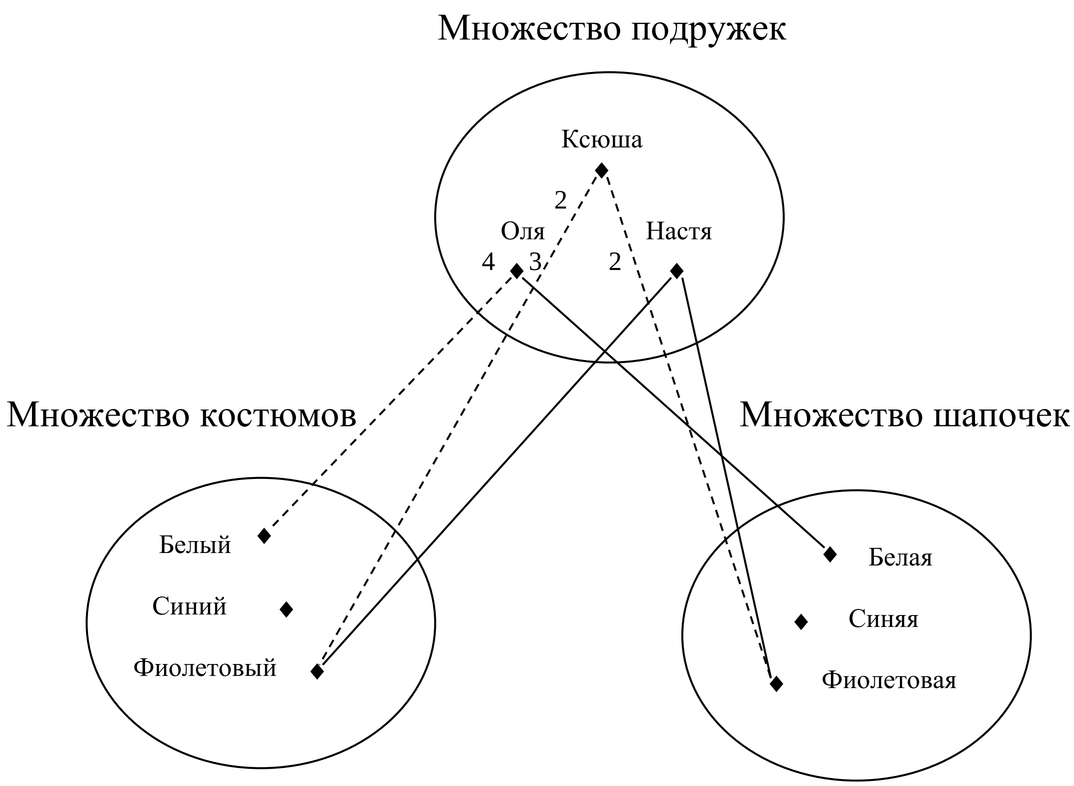
(3) Оля в белой шапочке.

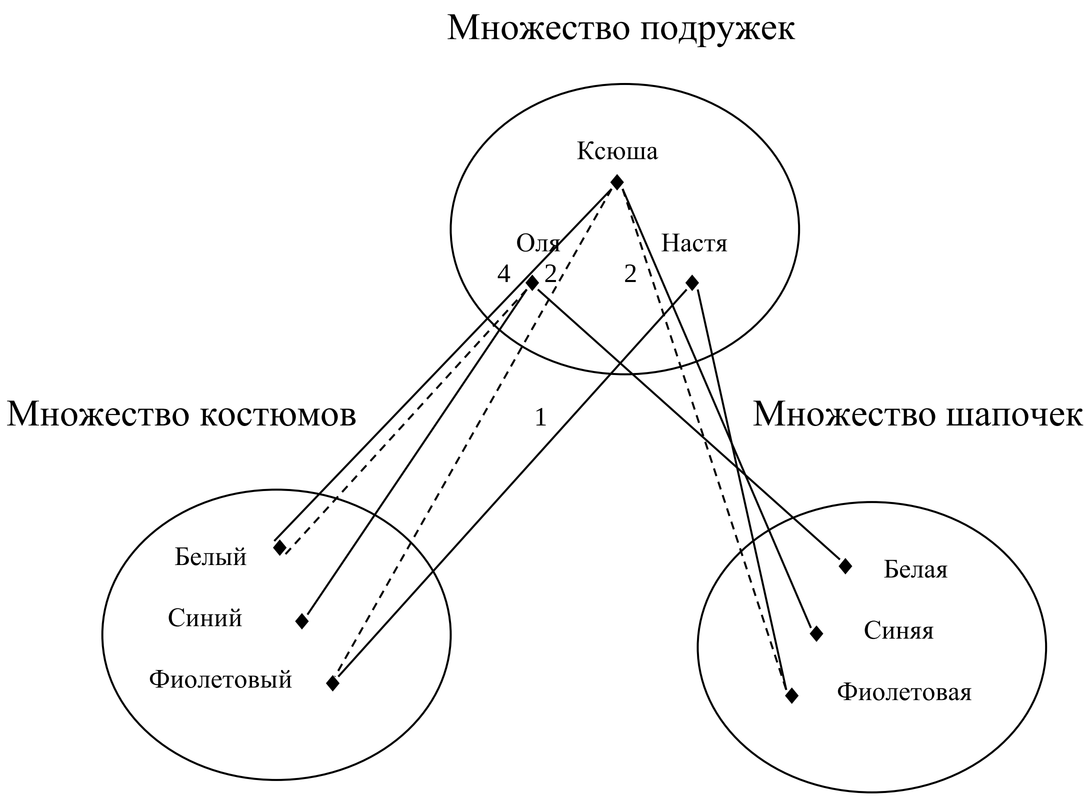
(4) Костюм у Оли не белый.

Из условия (2) ясно, что костюм и шапочка Ксюши не фиолетовые, поэтому соединяем элементы множеств <Ксюша> — <фиолетовый костюм> и <Ксюша> — <фиолетовая шапочка> пунктирными линиями. Из условия (3) — Оля в белой шапочке, поэтому соединяем сплошной линией элементы множества <Оля> — <белая шапочка>. Из условия (4) — у Оли костюм не белый, поэтому соединяем пунктирной линией элементы множеств <Оля> — <белый костюм>.

Видим, что Ксюша не в фиолетовой шапочке и не в белой (в белой — Оля), значит, Ксюша в синей шапочке.






Соединяем сплошной линией элементы множеств <Ксюша> — <синяя шапочка>. Так как в белой шапочке Оля, в синей шапочке Ксюша, то сплошной линией следует соединить элементы множеств <Настя> — <фиолетовая шапочка>. Итак, Настя в фиолетовой шапочке. По условию (1) костюм и шапочка у Насти одного цвета, поэтому соединяем сплошной линией элементы множеств <Настя> — <фиолетовый костюм>.

Теперь видно, что Оля в синем костюме: она не в белом (условие 4) и не в фиолетовом (в фиолетовом костюме Настя), а Ксюша в белом костюме.

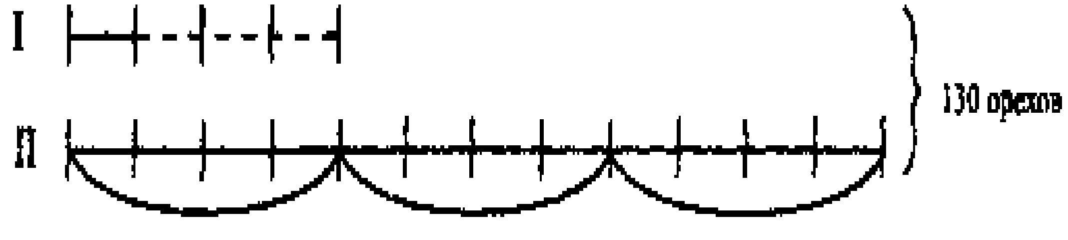
Таким образом, Настя в фиолетовом костюме и шапочке, Ксюша в синей шапочке и белом костюме, а Оля в синем костюме и белой шапочке.

## 6. Методика решения старинных задач

Использование на уроках и внеклассных занятиях по математике элементов из ее истории является не только эффективным средством развития интереса учащихся к предмету, но также имеет познавательное и воспитательное значение.

Однако освещать историю развития изучаемых в начальных классах математических понятий на уроках не представляется возможным. Можно сообщать лишь некоторые сведения из истории математики. Один из эффективных методов проведения такой работы — решение на уроках или внеклассных занятиях старинных задач.

Предлагаем ряд таких задач, взятых из старинных русских рукописей и «Арифметики» Л. Магницкого. Их решение требует не только математических знаний, но и сообразительности, творчества, умения логически мыслить, желания найти нетрадиционные пути решения. Кроме того, эти задачи дают возможность учителю проводить небольшие экскурсы в историю развития математики в России, рассказывать о составителях этих задач, которыми и поныне гордится русский народ.

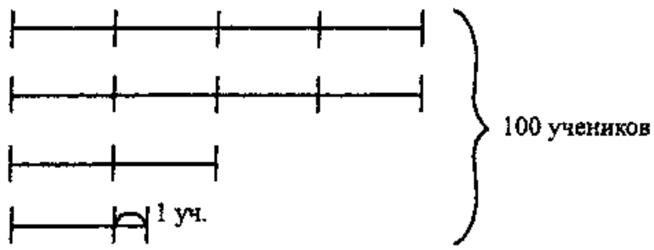


**Задача 1.**

Спросил некто учителя: «Скажи, сколько у тебя в классе учеников, так как хочу отдать к тебе в учение своего сына». Учитель ответил: «Если придет еще учеников столько же, сколько я имею, и полстолько, и четверть столько и твой сын, то будет у меня учеников 100». Сколько учеников в классе?

Решение:

Обозначая количество учеников в классе при помощи отрезка и моделируя связи и отношения между данными, получим схему (рис. 1).



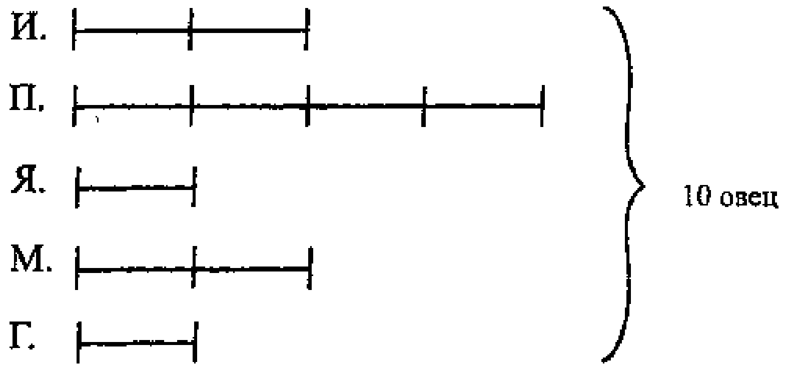

Из схемы легко найти решение (100-1): 11 = 9 9-4 = 36

Ответ: 36 учеников было в классе.

**Задача 2**

У пятерых крестьян — Ивана, Петра, Якова, Михаила и Герасима было 10 овец. Не могли они найти пастуха, чтобы пасти овец. И говорит Иван остальным: «Будем, братцы, пасти овец по очереди — по столько дней, сколько каждый из нас имеет овец». По сколько дней должен каждый крестьянин пасти овец, если известно, что у Ивана в два раза меньше овец, чем у Петра, у Якова в два раза меньше, чем у Ивана; Михаил имеет овец в два раза больше, чем Яков, а Герасим — в четверо меньше, чем у Петра?

Воспользуемся для решения данной задачи схематическим моделированием (рис. 2).




Решение:

10: 10=1 — было овец у Герасима и Якова.

1-2 = 2 — было овец у Михаила и у Ивана.

2*2 = 4 — было овец у Петра.

О т в е т: у Ивана — 2 овцы, у Петра — 4 овцы, у Якова— 1 овца, у Михаила — 2 овцы, у Герасима — 1 овца.

**Задача 3**

Говорит дед внукам: «Вот вам 130 орехов. Разделите их на две части так, чтобы меньшая часть, увеличенная в 4 раза, равнялась бы большей части, уменьшенной в 3 раза». Как разделить орехи?

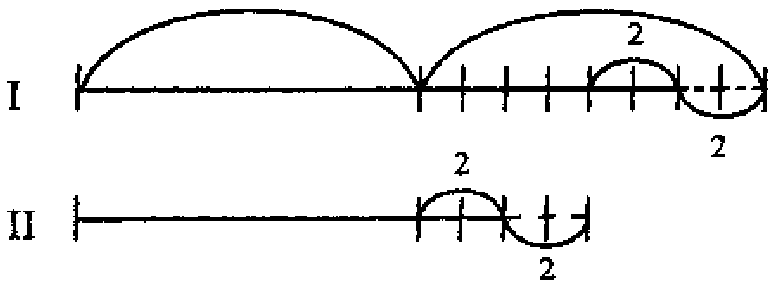
Воспользуемся опять схематической моделью (рис. 3).

Решение:

130 : 13 = 10 (орехов) — меньшая часть. 10 • 4 • 3 = 120 (орехов) — большая часть.

Ответ: 10 орехов, 120 орехов. Задача 4

Двое ели сливы. Один сказал другому: «Дай мне свои две сливы, тогда у нас будет слив поровну», — на что другой ответил: «Нет, лучше ты дай мне свои сливы, тогда у меня будет в два раза больше, чем у тебя». Сколько слив было у каждого?



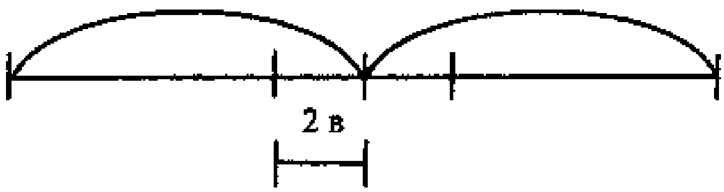
Из схемы видно, что у первого было (2+ 2 + 2 +2)- 2- 2= 14 (слив), а у второго 14-2-2= 10 (слив).

Воспользуемся схематическим моделированием и для решения некоторых задач на движение.

**Задача 4.**

Прохожий, догнавший другого, спросил: «Как далеко до деревни, которая у нас впереди?» Ответил другой прохожий: «Расстояние от той деревни, от которой ты идешь, равно третьей части всего расстояния между деревнями, а если еще пройдешь 2 версты (верста — старинная русская мера длины, 1 верста = 1,067 км), тогда будешь ровно посередине между деревнями». Сколько верст осталось еще идти первому прохожему и какое расстояние между деревнями?

Условие задачи выразим схемой :




Решение:

2 • 2 • 3 = 12 (верст) ду деревнями.

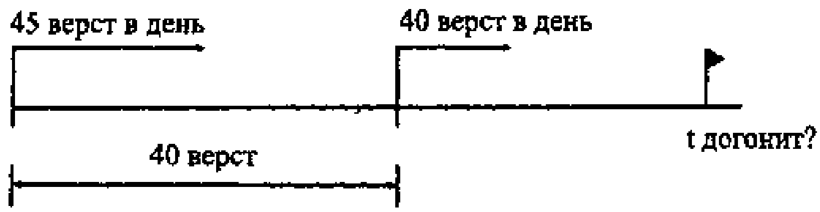
12-4 = 8 (верст) — первому прохожему.

Ответ: 8 верст, 12 верст.

**Задача 5.**

Послан человек из Москвы в Вологду, и велено ему в хождении своем совершать во всякий день по 40 верст. На следующий день вслед ему послан второй человек, и приказано ему проходить в день по 45 верст. На какой день второй человек догонит первого?

В данной задаче речь идет о движении вдогонку. Изобразим схемой условие задачи (рис. 6).



Решение:

45 - 40 = 5 (верст в день) — скорость сближения.

40 : 5 = 8 (дней).

О т в е т: на 8-ой день второй человек догонит первого.

**Задача. 6**

Один воин вышел из города и проходил по 12 верст в день, а другой вышел одновременно и шел таким образом:

в первый день прошел 1 версту, во второй день — 2 версты, в третий день — 3 версты, в четвертый — 4 версты, в пятый — 5 верст и так прибавлял каждый день по одной версте, пока не настиг первого. Через сколько дней второй воин настиг первого?

Решение:

На 12-й день скорость второго воина будет равняться скорости первого, т.е. 12 верст в день. За эти 12 дней первый пройдет 12 • 12 = 144 (версты), а второй 1+2 + 3+ 4 + 5 +

6+ 7 + 8 + 9+10+11 +12 = 78 (верст), между ними будет 144 - 78 = 66 (верст).

Затем расстояние между ними начнет сокращаться: в 13-й день — на 1 версту, в 14-й день — на 2 версты и т.д., пока не станет нулевым:

66-1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11 =0 Из последнего равенства видно, что второй воин покроет разницу в 66 верст за 11 дней, поэтому второй воин настигнет первого за 12 + 11 = 23 (дня). Ответ: через 23 дня.

Предлагаем еще некоторые «житейские истории» из тех же старинных рукописей и «Арифметики» Л. Магницкого.

**Задача 7.**

В жаркий день 6 косцов выпили бочонок кваса за 8 часов. Нужно узнать, сколько косцов за 4 часа выпьют такой же бочонок кваса.

Эту задачу можно решить двумя способами: методом приведения к единице или на основании взаимно-обратной пропорциональности между величинами.

Способ 1

8 • 6 = 48 (часов) — выпьет бочонок кваса один косец.

48 : 4 = 12 (косцов) — выпьют бочонок кваса за 4 часа. Способ 2

Если количество часов сократилось в 8:4 = 2 (раза), то количество косцов, которые выпьют такой же бочонок кваса, возрастет в 2 раза, т.е. 6 • 2 = 12 (косцов).

**Задача 8.**

3 цыпленка и 2 гусенка стоят 99 копеек, а 5 цыплят и 4 гусенка стоят 1 рубль 83 копейки. Сколько стоит один цыпленок и один гусенок в отдельности?

Решение:

Если 3 цыпленка и 2 гусенка стоят 99 копеек, то 6 цыплят и 4 гусенка стоят 198 копеек.

Из условия задачи знаем, что 5 цыплят и 4 гусенка стоят 183 копейки. Анализируя эти данные, замечаем, что 6-5 = 1 (цыпленок) — который стоит 198 - 183 = 15 (копеек).

Подставляя стоимость одного цыпленка в первой части условия задачи, находим стоимость одного гусенка: (99 - 15 • 3): 2 = 27 (копеек).

Ответ: 15 копеек стоит один цыпленок, 27 копеек стоит один гусенок.

Этап знакомства учеников со старинными задачами следует начинать со сведений о жизни и деятельности русского математика и педагога Леонтия Филипповича Магницкого. Сообщение биографических данных об этом самородке-математике служит средством пробуждения интереса учащихся к математике.

Вот некоторые факты его биографии.

Родился Л.Ф. Магницкий 9 июня 1669 г. в Осташковской слободе Тверской губернии в семье крестьянина. Один из священников того времени писал, что мальчик с малых лет прославился в своей слободе тем, что сам научился писать и читать, «разбирать мудреное и трудное». Настойчивым и упорным трудом он приобрел глубокие познания в точных науках.

Знатные богомольцы перевезли мальчика в Москву.

В знак глубокого уважения к математическому таланту царь Петр I предложил изменить фамилию мальчика Телятин на Магницкого, объясняя свое решение тем, что «как магнит привлекает к себе железо, так и он своими природными и самообразованными способностями обратил внимание на себя». Возможно поэтому именно ему было предложено написать учебник по изучению математики для школы навигации, которая была открыта впервые в Москве в 1701 г. по указу Петра I.

Л.Ф. Магницкий успешно справился с предложением Петра I, и в 1703 г. в Москве была издана книга «Арифметика, сиречь наука числительная» на славянском языке. Эта книга названа еще энциклопедией математических знаний того времени.

Кроме основ арифметики, учебник содержал элементы алгебры, геометрии, тригонометрии, астрономии и навигации, которые нужны были для учащихся школы навигации. Учебник насыщен задачами и примерами, большинство из которых увлекательны по содержанию. Книга была в употреблении почти до середины XVIII века, являясь, по словам М. Ломоносова, «вратами своей учености».

Л.Ф. Магницкий работал не только преподавателем в навигационной школе, но в разное время исполнял и другие правительственные поручения. Скончался Л.Ф. Магницкий 19 октября 1739 г.

Предлагая некоторые старинные задачи на уроках математики или внеклассных занятиях и сопровождая их историческими сведениями об их составителях, мы не только формируем у школьников интерес к учению, развиваем у них патриотические чувства, но и побуждаем к самостоятельным мыслительным действиям и проявлению творчества при решении задач.

## 7.Методические рекомендации по использованию задач повышенной трудности в процессе обучения математике

Опыт работы учителей показывает, что задачи повышенной трудности целесообразно распределить на весь учебный год по всем изучаемым темам курса. Уже в сентябре можно рекомендовать четвероклассникам, которые хотят научиться успешно решать задачи и получать хорошие или отличные оценки, завести тетради специально для задач повышенной трудности. Как правило, большинство четвероклассников заводят такие тетради.

Хорошим стимулом для решения учащимися младших классов задач повышенной трудности является проведение районных, городских и внутришкольных математических олимпиад. В число заданий олимпиады обязательно должны входить задачи из школьных учебников (учащихся заранее ставят в известность, что две задачи из четырех берутся из учебника). Поэтому у многих учащихся возникает желание прорешать все задачи повышенной трудности из учебника. Теперь перед учителем стоит задача - развить интерес у учащихся к решению задач, тем самым развить интерес к самой математике.

Задачи настоящего пособия довольно разнообразны и по содержанию, и по форме, и по учебно-воспитательным функциям. Каждый учитель сам может продумать и определить пути использования той или иной задачи, исходя из индивидуальных особенностей класса, в котором он работает. Опытный учитель, безусловно, легко определит, где (на уроке или во внеурочное время) можно использовать ту или иную задачу, какими знаниями должны при этом обладать учащиеся, какие задачи нужно рассмотреть предварительно и др. Рекомендации, приведенные ниже, предназначены, главным образом, для начинающего учителя.

Разделим задачи на три группы - по способу их использования:

1) задачи, которые целесообразно решить со всеми учащимися;

2) задачи, которые полезно задать на дом в качестве необязательного задания, а решение их рассмотреть вне урока с теми учащимися, которых они заинтересуют (при наличии времени решение отдельных задач этой группы полезно разобрать со всеми учащимися);

3)задачи, рассматриваемые на занятиях математического кружка.

Отметим, что это деление весьма условно и зависит от уровня подготовки учащихся, от их интересов.

Некоторые задачи первой группы полезно предложить для устного решения в конце или в начале урока, можно использовать их и для математических викторин. В большинстве своем эти задачи не стандартны по содержанию и потому отнесены в раздел «Задачи повышенной трудности». Трудность многих из них определяется не столько математическим содержанием, сколько новизной и необычностью математической ситуации. Ввиду простоты решения таких задач следует добиваться, чтобы учащиеся хорошо их усвоили.

Среди этих задач есть задачи на смекалку, задачи-шутки, которые вызывают оживление в классе, пробуждают у учащихся «вкус» к умственной работе. Автор популярной книги «В царстве смекалки» Е. И. Игнатьев в предисловии писал: «... сообразительность и «смекалку» нельзя ни «вдолбить», ни «вложить» ни в чью голову. Результаты надежны лишь тогда, когда введение в область математических знаний совершается в легкой и приятной форме, на предметах и примерах обыденной и повседневной обстановки, подобранных с надлежащим остроумием и занимательностью». Особое внимание следует обратить па привитие учащимся навыков в решении комбинаторных задач.

Комбинаторные задачи, как правило, требуют от учащихся в поисках путей решения повышенной умственной активности, воображения и находчивости. Работу над этими задачами нельзя ограничить теми двумя-тремя минутами, которые обычно отводятся на решение устных упражнений в классе или на математических викторинах. Следует иметь в виду, что работа над комбинаторными задачами эффективна лишь в том случае, если учитель обеспечит учащимся возможность без спешки подумать над решением задачи. Конечно, решая простейшие комбинаторные задачи, учащиеся IV класса не смогут сделать обобщение. Однако подход к этому будет подготовлен.

Задачи, отнесенные к первой группе, можно решать как в классе, так и дома. В этом случае следует выполнить проверку домашнего задания.

Особенностью многих задач повышенной трудности является то, что при их решении первым может добиться успеха необязательно самый лучший в классе «математик». Такой успех нередко служит побудительным толчком для серьезного отношения к математике.

Задавая в качестве обязательного домашнего задания упрочения из раздела «Задачи повышенной трудности», учитель должем быть особенно внимателен: отдельные учащиеся, не справившиеся с домашним заданием, могут потерять веру в свои силы. С такими учащимися нужна индивидуальная работа, которая позволит учителю выяснить, какие затруднения испытывают учащиеся при решении задач, и наметить пути преодоления утих затруднений.

Основная цель задач второй группы - развитие у учащихся интереса к предмету, накопление определенного запаса математических фактов и сведений, углубление знаний, приобретаемых на уроках. Задачи этой группы доступны пониманию всеми учащимися, но требуют для своего решения довольно много времени.

Среди задач второй группы большой интерес у учащихся вызывают упражнения на восстановление цифр в арифметических равенствах. С помощью простейших упражнений учитель должен найти возможность показать на уроке, как решаются такие задачи, а затем более сложные можно предлагать в качестве необязательного домашнего задания. При решении этих упражнений не следует требовать от учащихся письменной записи. Однако учащиеся должны уметь устно восстановить всю цепочку рассуждений, позволяющих им решать задачу, а также обосновать решение.

При возникших у учащихся затруднениях задачу из второй группы можно расчленить па более простые. Однако не следует торопиться с этим, так как наводящие вопросы или чрезмерно полные разъяснения учителя способны помешать развитию творчества и самостоятельности в работе.

Предлагая задачи в качестве необязательного домашнего задания, учитель не должен забывать о поощрении учащихся, успешно справившихся с заданием. Особенно это важно в младших классах. Вместе с тем не следует без конца хвалить одного и того же учащегося, так как это может привести к зазнайству и оказать отрицательное влияние на развитие личности. «Нам следует так воспитывать учащихся с повышенными способностями, чтобы они поняли простую мысль: способности накладывают на них повышенные обязанности перед обществом, но не дают права относиться к другим без должного уважения».

Успехи школьников в решении задач повышенной трудности во многом зависят ,от педагогического мастерства учителя, его личности. Доброжелательность, внимание учителя способствуют развитию интереса к предмету. Формальное отношение к решению задач повышенной трудности может отпугнуть от занятий математикой, оказать вредное влияние на здоровье школьника. Поэтому вовсе нет надобности заставлять каждого ученика решать все задачи, отнесенные ко второй группе. Пусть каждый решает столько задач, сколько сможет, и те задачи, которые ему представляются интересными. Этого будет достаточно для математического развития каждого учащегося в отдельности и всего класса в целом.

За неумение решать задачи повышенной трудности оценка учащимся не должна снижаться. И уж совсем недопустимо выставление отрицательных оценок в журнал за невыполнение упражнений, заданных в качестве необязательного домашнего задания. Отличные же оценки в виде поощрения за решение задач повышенной трудности вполне естественно ставить в журнал.

Многие задачи второй группы можно было бы решить в классе: они полезны для развития математических способностей учащихся и достаточно интересны. Однако они требуют много времени даже для того, чтобы осмыслить содержание задачи. Задавая задачу на дом, учитель дает возможность ученику осмыслить, решить ее не торопясь, не соревнуясь с учащимися в скорости решения (что иногда приводит к ошибкам). Не будет большой беды в том, если ученик, заинтересовавшись решением задачи, увлечет и членов семьи. В этом случае радость успеха ученика могут разделить не только учитель и одноклассники. А ведь успех является психологическим стимулом возникновения, поддержания и укрепления познавательных интересов школьников.

Задачи третьей группы целесообразно рассматривать на занятиях математического кружка. Это наиболее трудные задачи (в том числе логические задачи, задачи-игры).

Если уровень подготовки школьников недостаточно высок, то на занятиях кружка можно рассмотреть часть задач второй группы. В любом случае задачи повышенной трудности служат «переходным мостом» от классной работы к внеклассной, служат хорошим материалом для дополнительной нагрузки наиболее способных к математике учащихся как в школ, так и дома.

Последовательное осуществление органической связи между повседневной учебной работой на уроках и внеклассной работой позволит учителю добиться больших успехов.

Решая задачу повышенной трудности, целесообразно рассмотреть различные способы ее решения. Полезнее одну задачу решить несколькими способами (не жалеть времени), чем решить несколько однотипных задач одним способом. К сожалению, «иногда случается и так, что учитель связывает инициативу школьника, отвергая предложенное учеником оригинальное решение только потому, что оно не соответствует структуре учебника, школьному стандарту. А это крайне опасно, поскольку при этом сдерживается развитие творческого начала».

Важно поощрять поиск различных способов решения задач, а не стремиться навязывать свое решение. Общие методы решения задач должны стать прочным достоянием учащихся, но наряду с этим необходимо воспитывать у учащихся умение использовать особенность каждой задачи, позволяющую решить ее проще. Именно отход от шаблона, конкретным анализ условий задачи является залогом успешного ее решения. Особое внимание следует обращать на решение задач арифметическим способом (особенно после того, как учащиеся научатся решать задачи с помощью уравнений), так как именно решение задач арифметическим способом способствует развитию независимости, оригинальности мышления, изобретательности.

Наблюдения показывают, что учащиеся, ознакомившись со способом решения задач с помощью уравнения, не обременяя себя глубоким анализом условий задачи, стараются побыстрее составить уравнение и перейти к его решению. При этом и введение обозначений, и схема решений соответствуют определенному шаблону.

Задача учителя - на примерах убедить учащихся, что решение задач по шаблону часто приводит к значительному увеличению объема работы, иногда решение усложняется, увеличивается возможность появления ошибок. Поэтому учащимся полезно предложить правило: прежде чем составлять уравнение для решения задачи, нужно внимательно изучить условие задачи, подумать над тем, какой способ решения наиболее соответствует ее условию, попытаться решить задачу арифметическим способом.

Решение арифметическим способом задач, шаблонный метод решения которых нелегко приводит к результату, является одним из лучших средств развития самостоятельного творческого мышления учащихся. С помощью специально подобранных задач можно показать учащимся красоту и простоту логического рассуждения, приводящего к решению задачи.

Рассматривая решение задач несколькими способами, учитель должен ориентировать учащихся на поиски красивых, изящных решений задач. Тем самым учитель будет способствовать эстетическому воспитанию учащихся и повышению их математической культуры.

Наибольшие затруднения у учащихся, как правило, вызывают решения нестандартных задач, т. е. задач, алгоритм решения которых учащимся неизвестен. Одна и та же задача может быть стандартной или нестандартной в зависимости от того, обучал ли учитель решению аналогичных задач учащихся или нет. Например, задачи па нахождение суммы конечного числа членов арифметической прогрессии для учащихся младших классов нестандартные а для старшеклассников, изучивших тему «Арифметическая прогрессия»,- будут стандартные.

Вообще, любая задача, взятая изолированно, сама по себе является нестандартной, но если с ней рядом поместить несколько подобных задач, то она становится стандартной. Поэтому вопрос «Как научить учащихся решать нестандартные задачи?» можно заменить: «Как научить учащихся решать задачи, если алгоритм их решения им неизвестен?»

Современная учебно-методическая литература (отечественная и зарубежная) содержит различные попытки помочь учащимся в решении задач с помощью формулирования общих приемов, позволяющих найти путь к решению конкретной задачи. Наиболее интересны в этом отношении книги известного математика и замечательного педагога Д. Пойа «Как решать задачу» (М., 1961), «Математика и правдоподобные рассуждения» (М., 1975), «Математическое открытие» (М., 1976). В увлекательной форме Д. Пойа анализирует процесс «математического открытия». На примерах задач школьного курса процесс решения задач Д. Пойа анализирует в неразрывной связи с процессом обучения решению задач, так что здесь тесно связаны два вопроса: «Как решать задачу?» и «Как научить задачу решать?»

Считая, что учитель знаком с работами Д. Пойа, напомним, что в книге «Как решать задачу», адресованной преподавателям, стремящимся развить способности своих учащихся к решению задачи, и ученикам, желающим развить свои способности, с помощью таблицы (тщательно отобранных и размещенных вопросов) даются правила и советы, имеющие две цели: первая - помочь ученику решить именно данную задачу, вторая - так развить способности ученика, чтобы в будущем он смог решать задачи самостоятельно.

Отметим, что многие учителя и учащиеся интуитивно устанавливают правила, подобные тем, которые приводит Д. Пойа, а опытный учитель при обучении учащихся умениям решать задачи пользуется теми приемами, которые описывает Д. Пойа (даже в том случае, если он не читал его книг). Разделяя методические концепции известного математика, по мере необходимости будем ссылаться на его авторитет. Д. Пойа одним из первых попытался создать теорию, предметом которой являются не математические доказательства, а способы догадываться о таких доказательствах, открывать математические истины и решать математические задачи. Он одним из первых наиболее четко и полно сформулировал правила, которыми пользуются (должен пользоваться!) учитель, желающий научить своих учеников решать задачи, и любой человек, желающий решить нестандартную задачу.

Как же научить учащихся решать нестандартные задачи? Понятно, что научить решению задач, лишь показывая образцы таких решений, нельзя. Еще выдающийся немецкий педагог Л. Дистервег (1790—1866) писал: «Плохой учитель преподносит истину, хороший учит ее находить».

Прежде всего, следует учесть, что научиться решать задачи учащиеся смогут, лишь решая их. «Решение задач - практическое искусство, подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано; научиться ему можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь... если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их». И хотя методы и приемы решения задач усваиваются практически, однако, отсюда не следует, что учитель добьется успеха, если будет только требовать от учащихся решать побольше задач, давать им ответы и показывать образцы решения. Необходимо учесть психологический аспект поставленной проблемы. Решение любой достаточно трудной задачи требует от учащегося напряженного труда, проявления воли и упорства, которые, в свою очередь, воспитываются практикой. Особое волевое усилие, которое учащийся должен проявить, может обеспечить значительные успехи.

Воля и упорство наиболее полно проявляются у учащихся, если задача интересна. В этом случае задачу легче решать, так как интерес к ней сам по себе, независимо от желания, мобилизует умственную энергию, облегчает запоминание. Поэтому учитель должен стараться подбирать такие задачи, чтобы учащиеся хотели их решить, хотели их сделать задачами «для себя», «Задача становится задачей для вас, когда вы ставите себе целью ее решить... если вам очень хочется найти ответ самому, своими собственными силами, то вы сделали задачу действительно вашей, вы относитесь к ней серьезно. Постановка задачи для себя есть начало решения,..».

Подбирая задачи, нужно помочь учащемуся обнаружить, что математическая задача может быть столь же увлекательной, как головоломка, и что напряженная умственная работа в случае победы может доставлять много радости. Практика показывает, что у школьников младших классов (да и у старшеклассников) большой интерес вызывают задачи практического содержания.

Воспитание интереса учащихся к математике, развитие их математических способностей невозможно без использования в учебном процессе задач на сообразительность, задач-шуток, математических ребусов.

К сожалению, достаточно распространено мнение, что «занимательные» задачи учащийся может решать только дома, на кружке, но не на уроке. Однако такая точка зрения вряд ли может быть педагогически оправдана: слабый учащийся будет лишен интересных задач, так как кружки он не посещает, а дома у него обычно остается мало Бремени. Поэтому занимательные задачи, задачи-шутки должны найти место и на уроке.

Заинтересованный занимательными задачами учащийся начинает увлекаться математикой и переносит интерес к ней и на «скучные» разделы, неизбежные в каждом предмете. В конечном счете это способствует быстроте и глубине усвоения, прочности запоминания.

Пробудить интерес к решению задачи можно, если предложить учащимся угадать ее решение или ответ. Тогда ученик, которому пришла в голову какая-либо догадка, не отвлечется и будет внимательно следить за ходом решения, чтобы узнать, был ли он прав.

Итак, первая задача, которая стоит перед учителем, желающим научить учащихся решать задачи, - это подбирать упражнения, вызывающие у учащихся интерес и желание их решить.

Другой предпосылкой для успешного решения задачи является уверенность учащегося в том, что он сможет решить предложенную ему задачу. Задачи должны быть доступны, иначе школьники потеряют веру в свои силы, утратят интерес к решению задач, а вместе с ним и интерес к самой математике. Если задачи достаточно трудны и учащийся не может их решить, то досада от безрезультатности труда снижает эффективность мышления, усвоения и осложняет дальнейшее обучение. Если же учащийся чувствует уверенность в своих силах, то он с радостью решает задачи, у него появляется повышенный интерес к предмету, а это в спою очередь облегчает и ускоряет поиск путей решения математических задач.

Таким образом, интерес к задаче, желание ее решить и уверенность в том, что задача «по силам» являются необходимыми предпосылками для успешного решения задачи учащимися.

Ну а как же быть в том случае, если и задача интересна и ученик не боится трудностей и не жалеет времени для ее решения, а задача не получается? Каким образом направить усилие ученика, затрудняющегося самостоятельно начать или продолжить решение задачи? Здесь на помощь учащемуся должен прийти учитель. Воспитание у учащихся навыков самостоятельного отыскания решений задач в большей степени зависит от учителя, от его желания и умения творчески подойти к этому вопросу.

В процессе решения каждой задачи и ученику, решающему задачу, и учителю, обучающему решению задач, целесообразно четко различать четыре ступени; 1) понимание постановки задачи; 2) составление плана решения; 3) осуществление плана; 4) изучение полученного решения («взгляд назад», - так называет эту ступень Д. Пойа).

Наблюдения показывают, что даже при решении несложной задачи учащиеся очень много времени тратят на рассуждение о том, за что взяться, с чего начать. Чтобы помочь учащимся найти путь к решению задачи, учитель должен уметь поставить себя на место решающего задачу, попытаться увидеть и понять источник его возможных затруднений, направить его усилия в наиболее естественное русло. Умелая помощь ученику, оставляющая ему разумную долю самостоятельной работы позволят учащемуся развить математическое чутье, накопить опыт, который в дальнейшем поможет находить пути к решению новых задач.

В чем же должна заключаться помощь учителя, чтобы обеспечить максимальную самостоятельность учащегося при решении им задач? «Лучшее, что может сделать учитель для учащегося, состоит в том, чтобы путем неназойливой помощи подсказать ему блестящую идею... Хорошие идеи имеют своим источником прошлый опыт и ранее приобретенные знания... Часто оказывается уместным начать работу с вопроса: «Известна ли вам какая-нибудь родственная задача?».

Не следует забывать, что во время мышления осуществляется актуализация, или приближение знаний. Под актуализацией знаний понимают ситуацию, при которой для решения задачи человек самостоятельно привлекает знания из своего прошлого опыта. Не случайно Д. Пойа средством обучения решению задач, средством для нахождения плана решения рассматривает вспомогательные задачи: «Нельзя ли найти связь между данной задачей я какой-нибудь задачей с известным решением? Или с задачей, решающейся проще?».

Однако, следует заметить, что умение подбирать, вспоминать вспомогательные задачи, свидетельствует о том, что учащийся уже овладеет некоторым запасом различных приемов решения задач. Учащиеся IV и V классов, как правило, затрудняются в отыскании вспомогательных задач, особенно задач нового типа, так как опыт я решении задач у них невелик. К тому же следует учесть психологию учащегося младших классов: он не слишком долго думает над задачей, ему хочется как можно быстрее увидеть результат своего труда (конечно, положительный). Отсюда следует, что в младших классах школы, видя затруднения учащегося, учитель должен сам предложить вспомогательные задачи. Умело поставленные наводящие вопросы, вспомогательная задача или система вспомогательных задач помогут учащимся, понять идею решения задачи.

**Группа I**

**1**. Какой цифрой оканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 81?

*Решение*. Данное произведение оканчивается нулем, так как одним из множителей является 10, а в произведении 10 на любое число получим число, оканчивающееся нулем.

**2**. Сколько нулей стоит в конце произведения всех натуральных чисел от 10 до 25?

*Решение.* Предположим, что это произведение разложили на простые множители. Так как нуль на конце произведения образуется при умножении 5 на 2, то нулей будет столько, сколько раз можно выделить произведение 5 • 2 из разложения данного произведения на простые множители. Число 2 как множитель встречается в разложении каждого четного числа на простые множители по крайней мере один раз, поэтому для подсчета числа нулей на конце произведения достаточно подсчитать количество пятерок в разложении данного произведения на простые множители: их 5 (в числах 10, 15, 20, 25). Значит, произведение будет оканчиваться пятью нулями.

Замечание. Для закрепления способа решения задачи полезно предложить учащимся вычислить количество нулей, содержащихся в произведении всех натуральных чисел от 1 до 100 включительно.

**3**. 4 карандаша и 3 общих тетради стоят 54 к., 2 карандаша и 2 общих тетради - 34 к. Сколько стоят: а) 8 карандашей и 7 общих тетрадей? б) 8 карандашей и 4 общие тетради?

*Решение*. а) Если 2 карандаша и 2 общих тетради стоят 34 к., то 4 карандаша и 4 общие тетради - 68 к. Тогда 8 карандашей и 7 общих тетрадей стоят 1 р. 22 к. (54 + 68 = 122).

б) Так как 2 карандаша и 1 общая тетрадь стоят 20 к. (54 — 34 = = 20), то 8 карандашей и 4 тетради стоят 80 к. (20 • 4 = 80).

**4**. 10 учебников стоят на 2 р. дороже, чем 30 тетрадей. Те же 10 учебников стоят на 1 р. 70 к. дороже, чем 40 таких же тетрадей. Сколько стоит один учебник и одна тетрадь?

*Решение*. Из условия ясно, что 10 тетрадей (40 - 30 = 10) стоят 30 к. (2 р. - 1 р. 70 к. = 30 к.). Следовательно, одна тетрадь стоит 3 к. (30 : 10 = 3). 10 учебников стоят 2 р. 90 к. (2 р. + 3 к. • 30 = 2 р. 90 к.), один учебник - 29 к.

**5**. В оранжерее были срезаны гвоздики: белых и розовых - 400 штук, розовых и красных - 300, белых и красных - 440. Сколько гвоздик каждого цвета было срезано в оранжерее? [Белых гвоздик - 270, розовых - 130, красных - 170.]

Указание. Сложить все данные числа и разделить результат на два; получим количество гвоздик всех трех цветов, срезанных в оранжерее.

**6**. В шахматном турнире участвовали 7 человек. Каждый с каждым сыграл по одной партии. Сколько партий они сыграли?

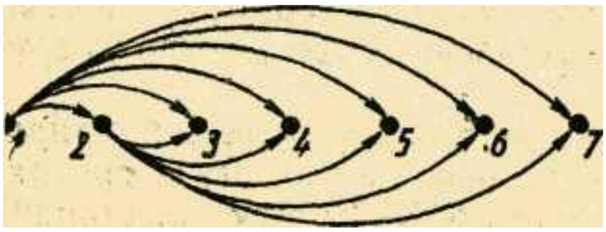
*Решение:*

I способ. Каждый шахматист сыграл 6 партий. Всего сыграна 21 партия (произведение 7 • 6 нужно разделить на два, в противном случае каждая партия будет сосчитана дважды).

II способ (с помощью графов). Пусть каждый шахматист обозначен точкой (рис. 15), а каждая сыгранная партия стрелкой от одного шахматиста к другому. (На рисунке обозначены партии только для первых двух игроков.) Если каждую партию считать один раз, то будем иметь 21 партию (6 + 5 + 4 + 3 + 2+1 = 21).

**7.** Семь человек обменялись фотографиями. Сколько при этом было роздано фотографий?

*Решение*. Так как каждый из семи человек дал 6 фотографий (всем, кроме себя), то всего было роздано 42 фотографии (6 • 7 = 42).




**8.** Каждые два из двадцати городов соединены линией воздушного беспересадочного сообщения. Сколько всего линий воздушного сообщения?

**9.** Как рассадить 45 кроликов в 9 клеток так, чтобы во всех клетках было разное количество кроликов?

*Решение*. Посадим в первую клетку одного кролика, во вторую - два, в третью - три и т. д. Имеем: 1 + 2 + 3 + 4 + +5+ 6 + 7+ 8 + 9 = 45 кроликов.

**10**. Принесли 5 чемоданов и 5 ключей от этих чемоданов, но неизвестно, какой ключ от какого чемодана. Сколько проб придется сделать в самом худшем случае, чтобы подобрать к каждому «чемодану свой ключ?

*Решение*. Первым из ключей, которые мы будем подбирать к чемодану, в самом худшем случае придется сделать 4 пробы. (Если ключ не подошел к 4 чемоданам из 5, значит, он соответствует пятому). Вторым ключом в самом худшем случае сделаем 3 пробы и т. д. Всего потребуется 10 проб (4 + 3 + 2 + 1 = 10).

**11.** 1) На одну чашку весов положен кусок мыла, а на другую чашку – ¾ такого же куска и еще 50 г. Весы находятся в равновесии. Какова масса куска мыла?

2) На одной чашке весов 2 куска мыла, а на другой 3/2 такого же куска и еще 50 г. Весы находятся в равновесии. Какова масса куска мыла?

*Решение*. 1) Если мысленно удалить с чашек весов по ¾ куска мыла, то на одной чашке останется ¼ куска мыла, а на другой гиря в 50 г. Так как весы останутся в равновесии, то – ¼ куска мыла имеет массу в 50 г, а весь кусок 200 г.

2) Если снять с обеих чашек весов по – 3/2 куска мыла, то на одной чашке весов останется ½ куска, а на другой - 50 г. Значит, масса куска мыла равна 100 г.

**12**. Два человека чистили картофель. Один очищал в минуту 2 картофелины, а второй - 3 картофелины. Вместе они очисти ли 400 штук. Сколько времени работал каждый, если второй проработал на 25 мин больше первого?

**13.** Чтобы подняться с первого этажа на третий этаж дома, надо пройти 52 ступеньки. Сколько ступенек надо пройти, чтобы подняться с первого этажа на шестой этаж того же дома (число ступенек между всеми этажами одинаково)?

*Решение*. Чтобы подняться на третий этаж дома, нужно пройти два этажа. Значит, чтобы подняться на один этаж, надо пройти 26 ступенек (52 : 2 = 26). Чтобы подняться на шестой этаж того же дома, нужно пройти 130 ступенек (26 • 5 = 130), так как до шестого этажа - 5 этажей.

**14.** Параллельно участку шоссе, длина которого 4 км, решено проложить телеграфную линию. Сколько потребуется телеграфных столбов, если интервал между двумя соседними столбами равен 50 м?

**7.** По столбу высотой 10 м взбирается улитка. За день она поднимается по столбу на 5 метров, за ночь опускается на 4 м. Сколько дней ей потребуется, чтобы подняться на вершину столба? Решение. За первый день улитка поднимется на 5 м, а за ночь опустится на 4 м. Следовательно, за первые сутки она окажется на высоте 1 м; 5 м пройдет за 5 суток. На шестой день улитка достигнет вершины.

**15.** Когда велосипедист проехал – 2/3 пути, велосипед сломался.

На остальной путь пешком он затратил вдвое больше времени, чем на велосипедную езду. Во сколько раз велосипедист ехал быстрее, чем шел?

*Решение.* Велосипедист прошел пешком- 1/3 пути, т. е. вдвое меньше того, что проехал, а времени затратил пешком вдвое больше. Следовательно, он ехал в 4 раза быстрее, чем шел.

**16.** У трех братьев имеется 9 тетрадей, причем у младшего - на одну тетрадь меньше, а у старшего - на одну тетрадь больше, чему, среднего. Сколько тетрадей у каждого? [2, 3, 4.]

**17.** У мальчика столько же сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько в этой семье мальчиков и девочек? [Четверо мальчиков и три девочки.]

**Группа II**

**1.** Имеется 9 кг крупы и гири в 50 г и 200 г. Каким образом в три приема отвесить на чашечных весах 2 кг крупы?

*Решение*. 1) Без гирь, с помощью весов разделим крупу пополам.

2) Одну из половинок с помощью весов (без гирь) снова разделим пополам. Получим пакет в 2 кг 250 г.

3) От пакета отделим 250 г с помощью имеющихся гирь в 50 г и 200 г. Останется 2 кг.

**2.** В пакете содержится 3 кг 600 г крупы. Как разделить с помощью двухчашечных весов и гири в 200 г крупу на два пакета, содержащие по 800 г, и пакет в 2 кг, сделав лишь три взвешивания?

*Решение*.

1) Делим 3 600 г пополам с помощью весов, без гирь.

2) Из одного пакета высыпаем 200 г при помощи двухсотграммовой гири, поставленной на другую чашку весов. Добавим эти 200 г во второй пакет, получим 2 кг.

3) Полученные 1600 г делим на пустых весах пополам.

**3.** В четырех классах школы учатся 60 человек. Докажите, что хотя бы двое из них празднуют день рождения в одну и ту же неделю.

*Решение*. Известно, что в году 52 недели. Если предположить, что на каждой неделе празднуют день рождения менее двух учеников (т. е. один или ни одного), то таких учеников наберется не более 52, а по условию задачи учеников 60. Значит, по крайней мере, два ученика из 60 празднуют свои дни рождения в одну и ту же неделю.

**5.** Когда отцу было 27 лет, то сыну было только 3 года, а сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет сейчас каждому из них?

*Решение*. Пусть сейчас сыну - $x$ лет, тогда отцу - $3x$ лет. Поскольку разность возрастов отца и сына постоянна и равна по условию 24 годам, то имеем уравнение: $3x - x = 24$, откуда $x = 12$; $3x = 36$.

**6.** Дочери в настоящее время 10 лет, а матери 36. Через сколько лет мать будет вдвое старше дочери?

*Решение*. Пусть дочери будет $x$ лет, а матери - $2 \bullet x$ лет, тогда имеем уравнение: $2x - x = 26$, откуда $x = 26$. Следовательно, мать будет вдвое старше дочери через 16 лет (26 — 10 = 16).

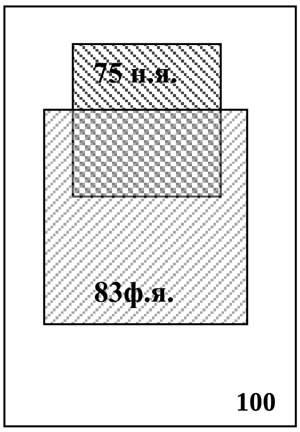
**Группа III**

**1.** Приехало сто туристов. Из них 10 человек не знали ни немецкого языка, ни французского, 75 знали немецкий и 83 французский. Сколько туристов знали французский и немецкий языки?

*Решение*. **I** способ. Так как 25 туристов (100 - 75 = 25) не знали немецкого языка, то 15 туристов (25 - 10 = 15) знали только французский язык, поэтому оба языка знали 68 туристов (83 - 15 = 68).

**II** способ. Так как 10 туристов не знали ни немецкого языка, ни французского, то немецкий или французский язык знали 90 туристов (100 - 10 = 90). Сложив числа 75 и 83, мы получим, что хотя бы один язык знали 158 туристов. Получили число, большее 90 потому, что дважды посчитали тех туристов, которые знали оба языка. Таким образом, французский и немецкий язык знали; 68 туристов (158 — 90 = 68).

Замечание. Найти путь к решению задачи помогают рисунки, которые обычно называют «кругами Эйлера».




**2.** Три сосуда заполнены (не доверху) водой. В одном сосуде 11 л, во втором - 7 л, в третьем - 6 л. В каждый сосуд можно налить из другого столько воды, сколько в нем было налито. Как разделить воду во всех трех сосудах поровну?

*Решение*. Поскольку в трех сосудах 24 л, то в каждом сосуде должно быть 8 л. Задача сводится к получению трех чисел 8 с помощью сложения и вычитания данных чисел и чисел, получающихся в результате сложения и вычитания данных: 8 = (7 + 7) - 6, 8 = (11 - 7) + 4, 8 = (6 + 6) - 4. Процесс переливания можно изобразить в виде таблицы:

11 1 6

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 14 | 6 |
| 4 | 8 | 12 |
| 8 | 8 | 8 |

**3.** В подвале стоят 7 полных бочек, 7 бочек, наполненных наполовину, и 7 пустых бочек. Как распределить эти бочки между тремя грузовиками, чтобы на каждом грузовике было 7 бочек и на всех грузовиках был одинаковый груз?

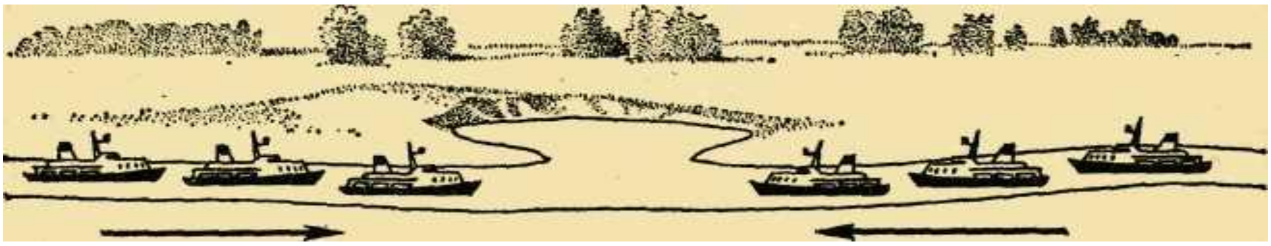
*Решение*. Пусть в полной бочке x килограммов груза. Тогда во всех бочках содержится ($7x + 7 \cdot 0{,}5x$) килограммов, т. е. $10{,}5x$ килограммов груза. Таким образом, на каждом грузовике должно быть 3,5x килограммов груза.

Начнем с распределения полных бочек. На любом грузовике не может быть более трех полных бочек и менее одной полной бочки (в первом случае масса груза на машине будет более 3,5% килограммов, во втором - все полупустые бочки придется погрузить на один грузовик). Если на одном грузовике - три полных бочки, то оставшиеся четыре полные бочки на два других грузовика можно распределить двумя способами (4 = 3+1=2 + 2). Количество пустых и полупустых бочек в каждом из этих двух случаев определяется однозначно. Таким образом, существует два и только два способа распределения всех бочек заданным способом между тремя грузовиками:

| Способ | Номер грузовика | Число полных бочек | Число бочек, заполненных наполовину | Число пустых бочек |
|---|---|---|---|---|
| 1 | I | 3 | 1 | 3 |
| | II | 3 | 1 | 3 |
| | III | 1 | 5 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | I<br>II<br>III | 3<br>2<br>2 | 1<br>3<br>3 | 3<br>2<br>2 |

**4.** На рисунке 17 изображен канал. Три парохода идут слева направо и три - навстречу им. В бухте может поместиться один пароход. Как разойтись этим пароходам?



*Решение.* Один пароход из левой «тройки» проходит в бухту, два других отходят назад, за ними отходит вся правая «тройка». Пароход выходит из бухты и проходит в правую сторону. Правая «тройка» переходит в прежнее положение. В бухту заходит второй пароход из левой «тройки». Операция повторяется.

**Заключение**

Приближение начального курса математики к современной науке требует изменения уровня мыслительной деятельности ученика, что в свою очередь ведет к модернизации методов обучения. Обучение математике на современном уровне требует разработки и применения таких методов, которые вызывают наибольшую активность мысли ученика и оптимально способствует его умственному развитию.

Овладение основами математики немыслимо без решения и разбора задач, что является одним из важнейших звеньев в цепи познания математики. Этот вид занятий не только активизирует изучение математики, но и прокладывает пути к глубокому пониманию её. Работа по осознанию хода решения той или иной задачи дает импульс к развитию мышления ученика. Решение задач нельзя считать самоцелью, в них следует видеть средство к углубленному изучению теоретических положений и вместе с тем, средство развития мышления, путь осознания окружающей действительности.

Кроме того, нельзя забывать, что решение задач воспитывает у детей многие положительные качества характера и развивает их эстетически. Даже сравнительно не сложные задачи пробуждают у школьника любознательность, заставляет его изобретать. Решение задачи напрягает ум и волю человека, ведет его к открытию и позволяет насладиться радостью победы.

Умение решать задачи – одно из сложнейших умений. Формируя его, важны все этапы работы с задачей: чтение и понимание текста, вдумчивое рассмотрение содержания и ситуации, лежащей в основе задачи, краткая запись задачи и иллюстрация, установление связей и зависимостей между данным и искомым, расчленение составной задачи на простые, выбор действия, установление последовательности в действиях, вычисления и проверка решения.

Для углубления понимания детьми структурных особенностей задач важно рассмотрение различных вариантов решения задач, систематическое составление задач самими учениками и упражнения в различных преобразованиях задач. Всё это в значительной мере способствует и математическому и общему развитию детей.

**Сок использованной литературы.**

1.Бантова М.А. Методика преподавания математики в начальных классах. Пособие для пед. училищ. Под ред. М.А. Бантовой. М.: «Просвещиние», 1973. – 304с.

2. Балл Г.А. Теория учебных задач.- М.:Педагогика,1990.

3. Зембатова Л.Т. Развитие логического мышления младших школьников в процессе решения текстовых задач (методические рекомендации). Сб. учебно-методических трудов Ставропольский государственный университет.- Ставрополь.-2011.-№4,-С.24-36

4.Зембатова Л.Т. Интегративный подход к формированию математических знаний у учащихся в начальной школе Вестник Северо-Осетинского государственного университета им. К.Л.Хетагурова.-2011.-№1-С.41-46.

5.Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе математики 4-5 классов: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1986. – 96с.: ил.

6.Лимантов Ф.С. Лекции по логике вопросов / Ф.С. Лимантов- Л.: 1975.

7.Менчинская Н.А., Моро М.И. Вопросы методики и психологии обучения арифметике в начальных классах. М., «Просвещение», 1965.

8.Методика начального обучения математике. Под ред. Скаткина Л.Н. М., «Просвещение», 1972.

9.Методы начального обучения математике. Под ред. Скаткина Л.Н. М., «Просвещение», 1965.

10.Психологические возможности младших школьников в усвоении математики. Под ред. Давыдова В.В. М.. «Просвещение», 1969.

11.Свечников А.А. Решение математических задач в 1-3 классах. Пособие для учителя. М., «Просвещение», 1976. – 160с.

12.Стойлова Л.П. Математика: Учебник для студ. высш. пед. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 424 с.

13.Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с., ил.

.